SHS Web of Conferences **22**, 00007 (2015)
DOI: 10.1051/shsconf/20152200007

Comprendre les géométries de la mesure par les « séries de problèmes ». L'exemple des pays d'Islam et de l'Occident latin du IX^{e} au XIV^{e} s[1]

Marc Moyon[a], Centre A. Koyré (UMR 8560) & XLIM-DMI (UMR 7252)

Université de Limoges, 123 avenue Albert Thomas, 87060 Limoges Cedex, France

Résumé. Cette contribution est une réflexion d'ordre méthodologique menée dans le cadre du groupe de recherche interdisciplinaire « Série de problèmes : au carrefour des cultures » du Labex HASTEC. D'abord, nous présentons succinctement notre corpus d'étude – les textes de géométrie de la mesure médiévale rédigés entre le IX^{e} et le XIV^{e} siècle autour du bassin méditerranéen –, pour lequel nous donnons les principaux éléments caractéristiques. L'historiographie est ensuite mobilisée pour dégager les principales raisons qui nous ont convaincu de l'importance de la notion de « série » dans l'étude des textes de notre corpus. Nous illustrons enfin notre propos par l'étude de deux séries de problèmes, extraites du *Liber mensurationum*, traduction latine du XII^{e} siècle réalisée à partir d'un texte arabe d'Abū Bakr.

Abstract. Understanding geometries of measurement by "series of problem". The example of Islamic countries and the Latin West from the ninth to the fourteenth century. This contribution is a methodological essay undertaken as part of the interdisciplinary research group "series of problems: at the crossroads of cultures" set up by the Labex HASTEC. First of all, we briefly present our corpus – the medieval texts of geometry of measurement written between the ninth and fourteenth centuries around the Mediterranean basin – for which we give the main features. Then, we focus on historiography in order to identify the main reasons that convinced us of the importance of the concept of "series" in the study of texts from our corpus. Finally, we illustrate our discussion by examining two series of problems, taken from *Liber mensuratіonum*, a twelfth century Latin translation, from an Arabic text written by Abū Bakr.

[a] e-mail : `marc.moyon@unilim.fr`

[1] Nous tenons à remercier Alain Bernard, Jeffrey Oaks et Bernard Vitrac pour leurs commentaires qui m'ont permis d'améliorer substantiellement ma contribution.

1. La géométrie de la mesure autour du Bassin méditerranéen, du IXe au XIVe siècle

1.1 Éléments de description générale :

En partie héritière des problèmes métrologiques antiques, la « géométrie de la mesure » – discipline classée par les philosophes des sciences des pays d'Islam dans le ᶜ*ilm al-misāḥa* [science du mesurage], et dans la *Practica geometriae* par ceux de l'Europe médiévale – se construit à partir de deux principales orientations : le mesurage et le découpage[2].

Le mesurage consiste à déterminer certaines grandeurs (longueurs, surfaces, volumes) inconnues par un raisonnement ou un calcul sur d'autres grandeurs caractéristiques connues. Il peut être conçu comme un prolongement de l'arpentage (dont l'objectif est la mesure effective *in situ* avec l'usage d'instruments) pour calculer, par exemple, la surface de terrains difficiles d'accès ou encore la détermination de distances inaccessibles, mais le mesurage est plus généralement envisagé de manière indépendante des instruments de mesure. C'est alors une pratique intellectuelle de la géométrie au sens étymologique du terme, avec des exercices de calcul de grandeurs géométriques à partir de grandeurs connues (dont la mesure a pu être réalisée par ailleurs).

Quant au découpage, c'est une opération géométrique qui consiste à « découper » une partie d'une figure donnée, qu'elle soit plane ou solide. Doivent alors être respectées plusieurs contraintes sur la manière de découper, la forme des parties obtenues ou encore sur le rapport entre la partie découpée et la figure initiale. Tous les textes du corpus de géométrie de la mesure ne développent pas la seconde orientation. Même si les manuscrits qui nous sont parvenus sont très nombreux, leur nombre semble bien en deçà de la production écrite globale du IXe au XIVe siècle, dans les trois principales langues scientifiques du bassin méditerranéen tout au long de cette période : l'arabe, l'hébreu et le latin.

Dans le cadre du présent travail, nous nous concentrons sur le premier aspect, à savoir le mesurage. À la fois science et art, il s'attache principalement à définir la mesure, à classer les figures géométriques fondamentales et à décrire des procédures de calcul de longueurs, de superficies et de volumes des différentes figures de la géométrie élémentaire plane et stéréométrique. Les figures géométriques planes sont toujours exposées avant les corps solides.

Trois familles de textes peuvent être repérées selon les critères d'exposition de leurs auteurs[3].

(a) Les uns s'apparentent à des formulaires dans lesquels n'apparaissent aucun exemple ni aucune donnée numérique. Seules les procédures fondamentales sont exposées pour chaque figure usuelle, dans un style concis. Citons, par exemple, la contribution de Thābit ibn Qurra (IXe s.) [3, p. 177–209], le formulaire adjoint à la fin du traité d'Ibn al-Haytham (Xe s.) [4, p. 538–637], les écrits d'ᶜAbd ar-Raḥmān (av. XIIe s.) [2], d'Ibn al-Raqqām (XIIIe s.) [5] ou encore l'*al-Iksīr* d'Ibn Liyūn (XIVe s.) [6].

(b) D'autres, quant à eux, sont fournis d'exemples numériques détaillés et complets qui servent à illustrer les procédures de calculs mis en place. Ces dernières ne sont pas en général démontrées. Cette dernière catégorie d'ouvrage est sans doute la plus importante quantitativement que ce soit en pays d'Islam ou en Europe. À titre d'exemples, appartiennent à cette catégorie les ouvrages d'Ibn ᶜAbdūn (Xe s.) [7, 8], d'Abū Kāmil (Xe s.) [9], du qāḍī Abū Bakr (XIe-XIIe s.) [10] ou encore celui d'un autre Abū Bakr connu sous *Abuothmi* (av. XIIe s.), transcription latine de son nom [2].

(c) Les derniers ouvrages que je mentionnerai ici sont les équivalents des précédents mais leurs auteurs ont fait le choix d'ajouter des démonstrations de style euclidien pour justifier les procédures utilisées. C'est en particulier le cas de la partie générale du texte d'Ibn al-Haytham précédemment cité, de l'*abrégé sur le mesurage* d'Ibn al-Bannā al-Marrakushī (XIVe s.) ou encore des chapitres des

[2] Pour une description plus précise, voir [1, 2].

[3] Il m'est impossible de donner ici davantage d'informations sur les textes et les auteurs cités dans la suite de ce paragraphe. J'indique donc systématiquement les éditions ou les études de référence qui permettra facilement aux lecteurs de se documenter.

ouvrages d'Abraham bar Ḥiyya (XI^{e}-XII^{e} s.) [11], de Fibonnaci (XIII^{e} s.) [12, 13] ou de Jean de Murs (XIII^{e}-XIV^{e} s.) [14]. Les preuves sont systématiques pour tous les énoncés (Ibn al-Haytham) ou bien ponctuellement réservées à certains énoncés (Fibonacci, Jean de Murs).

Le style de chacun de nos textes est homogène si bien que ces trois catégories n′ont pas d'intersection mis à part le texte démonstratif Sur les *principes de la mesure* d'Ibn al-Haytham dont le texte principal s'achève sur un *Rapport des procédés de mesure exposés dans ce traité* qui s'apparente au formulaire.

Ces éléments de descriptions suffisent à mettre en évidence la forte dépendance de ces textes les uns sur les autres, que ce soit à l'intérieur d'une même tradition linguistique, ou entre les diverses traditions en présence (arabe, hébraïque et latine). En effet, l'ensemble de cette production écrite se situe sur une période de temps relativement courte (entre le IX^{e} et le XIV^{e} siècle) et son contenu mathématique est élémentaire et largement circonscrit. En outre, même si nous avons plusieurs textes qui sont, soit anonymes, soit attribués à des auteurs dits mineurs pour lesquels les éléments biobibliographiques sont parfois difficiles, voire impossible à reconstruire, de nombreux autres sont attribués à d'éminents mathématiciens (dont certains sont mentionnés ci-dessus) et pour lesquels la paternité semble hors de cause. C'est, semble-t-il, une forte différence avec la tradition du corpus grec où les attributions aux mathématiciens de la tradition savante comme Euclide ou Diophante sont fort contestables (*cf.* Vitrac *infra*). Enfin, du côté du lectorat, nous avons peu d'informations. Il n'est pas difficile d'imaginer que ces textes doivent être produits dans un contexte d'enseignement de la géométrie élémentaire ou de formation professionnelle de quelques corporations d'arpenteurs, d'administrateurs fiscaux ou encore de juges [2]. Néanmoins, nous avons peu de témoignages précis en dehors de certains renseignements biobibliographiques sur les auteurs concernés, et les quelques préfaces d'ouvrages arabes plutôt stéréotypées (notamment sur la justification de l'absence de démonstration afin de mieux s'adresser aux débutants).

1.2 Quelques caractéristiques textuelles

Tous les textes relevant de la géométrie de la mesure au sens où nous l'avons défini ci-dessus, quelle que soit leur forme (chapitre d'ouvrage, texte indépendant en prose ou versifié) et l'objectif de leurs auteurs, sont construits comme des collections d'énoncés.

Dans le cas des textes-formulaires (a), ces énoncés sont universels pour la figure géométrique considérée. Ils récapitulent les formules essentielles de calcul d'aire et de volume des figures usuelles planes et solides.

> [Thābit ibn Qurra][4] *On prend l'une des hauteurs du triangle que l'on multiplie par le côté sur lequel elle tombe et on prend la moitié du produit; c'est l'aire du triangle.* [3, p. 184]
> [ᶜAbd ar-Raḥmān #4] *Et la façon de trouver l'aire de n'importe quel trapèze dont le sommet est parallèle à sa base est d'ajouter le sommet [et] la base et de multiplier le résultat par la moitié de la perpendiculaire tombant du sommet à la base. Et le résultat sera l'aire de n'importe lequel des trapèzes de cette famille.* [2]

Dans les deux autres cas (b ; c), ces énoncés peuvent prendre la forme de ce qu'on désignerait comme un exercice mathématique où, étant données des grandeurs géométriques, il s'agit d'en calculer d'autres. Ce sont ces énoncés-là que j'appellerai « problème » dans la suite de mon travail. La majorité de ceux-ci est inscrite dans un contexte spécifiée par la section à laquelle il appartient comme celle du carré, du rectangle, des quadrilatères, des triangles... Cette section peut être explicitement intitulée et se réfère, dans ce cas-là, le plus souvent à la figure géométrique étudiée. Ces problèmes respectent une formulation

[4] Dans tous les exemples qui suivront, j'indiquerai le nom de l'auteur en début de citation, et la référence bibliographique en fin de citation. Si l'édition de référence mentionne le numéro des énoncés, alors je l'indiquerai sous la forme #3, par exemple, pour le troisième énoncé de la collection.

relativement systématique[5] que l'on peut présenter en quatre étapes successives et résumées dans le tableau ci-dessous.

Tableau 1. Formulation des problèmes.

		[Abū Bakr # 82]	[Abū Bakr # 107]
(1)	Énoncé (s'adressant souvent directement au lecteur)	*Et si on te dit : l'aire [d'un trapèze] est cent trente-deux, la hauteur douze et le sommet quatre.*	*Et si on te dit : l'aire est dix-neuf et demi, la hauteur quatre et un tiers, et le sommet trois.*
(2)	Question (interrogative ou pas)	*Quelle est donc la base ?*	*Quelle est donc la base ?*
(3)	algorithme(s) de résolution accompagné(s) ou pas des résultats numériques (les calculs ne sont jamais explicitement effectués)	*Le procédé pour déterminer cela consistera à diviser l'aire par la hauteur, à doubler le résultat, et à retrancher le sommet de ceci,*	*Le procédé pour déterminer cela consistera à diviser l'aire par quatre et un tiers, à doubler le résultat, à ajouter à ceci le sommet qui est trois, et le résultat sera douze. Prends donc sa moitié qui est six,*
(4)	Réponse	*Il restera la base.* [2]	*et c'est la base.* [2]

Il se peut que la procédure et/ou les calculs de la troisième étape soient absents pour être remplacé par une référence à une résolution précédente :

> [Abū Bakr #135'] *Et si on te dit : le côté sous-tendu par l'angle droit est dix, et un second huit. Quel est donc le troisième ? Tu procéderas selon ce qui t'a été dit précédemment.* [2]

Enfin, dans le cas où l'auteur décide d'offrir à son lecteur systématiquement ou ponctuellement les preuves de l'exactitude des procédures exposées, celles-ci suivent les quatre premières étapes. Certains éditeurs les ont considérées comme un nouvel énoncé (et elles se voient alors dotées d'un numéro d'énoncé, *cf. infra* Tableau 3, Platon de Tivoli, #C22) ; d'autres les incluent dans le problème concerné (*cf. infra* Tableau 3, Abraham bar Ḥiyya, #92).

1.3 Question des origines et de généalogie : un survol historiographique

Les textes de géométrie de la mesure sont des textes mathématiques élémentaires qui ont largement été négligés par les historiens des mathématiques. Leur faible niveau n'est probablement pas la seule explication à ce manque d'intérêt. Il n'y a, en effet, que peu de chance pour que ces textes offrent une nouveauté conceptuelle; ils ont donc traditionnellement été jugés comme peu importants dans le cadre de l'histoire intellectuelle des idées mathématiques. Par exemple, si H.L.L. Busard s'est intéressé en 1968 au *Liber mensurationum* d'Abū Bakr, ce n'est certainement pas pour la riche collection de problèmes

[5] Notons ici une particularité du *Kitāb fī l-misāḥa* d'Abū Kāmil où la réponse est donnée juste après la question, pour ensuite laisser place à la procédure et au calcul effectif [9]. Le problème se décompose donc comme (1)-(4)-(2)-(3).

N°	Babylonien	Abû Bekr	Savasorda
1		$l = 10$; $A = ?$	$l = 10$; $A = ?$ Curtze (1), p. 28.
2		$l = 10$; $d = ?$	$l = 10$; $d = ?$ Curtze (1), p. 32.
3	$l^2 + l = 0$; 45 ; $l = ?$ Thureau, p. 1.	$l^2 + l = 110$; $l = ?$ deux solutions.	
4	$l^2 + 4\ l = 0$; 41, 40 ; $l = ?$ Thureau, p. 9.	$l^2 + 4\ l = 140$; $l = ?$	$l^2 + 4\ l = 77$; $l = ?$ Curtze (1), p. 36.
5	$l^2 - l = 14, 30$; $l = ?$ Thureau, p. 1.	$l^2 - l = 90$; $l = ?$ deux solutions.	
6	$l^2 - 1/3\ l = 0$; 5 ; $l = ?$ Thureau, p. 8.	$l^2 - 4\ l = 60$; $l = ?$ deux solutions.	$l^2 - 4\ l = 21$; $l = ?$ Curtze (1), p. 34.
9		$4\ l - l^2 = 3$; $l = ?$ deux solutions.	$4\ l - l^2 = 3$; $l = ?$ Curtze (1), p. 38.
10	$d = 10$; $l = ?$ Thureau, p. 78.	$d = \sqrt{200}$; $l = ?$	$d = \sqrt{200}$; $l = ?$ Curtze (1), p. 34.
12	Voir n° 4.	$l^2 + 4\ l = 60$; $l = ?$	Voir n° 4.
13	Voir n° 6.	$l^2 - 3\ l = 18$; $l = ?$	Voir n° 6.

Figure 1. Busard H.L.L., 1968, *Journal des Savants*, p. 73.

qu'il est, mais plutôt parce qu'il s'agit d'un des plus anciens témoins de l'introduction de l'algèbre en Europe. C'est d'ailleurs le titre explicite de son article et c'est bien sur ce thème que porte la majorité des commentaires [15]. Un autre argument non négligeable est lié à la résistance des sources manuscrites pour leur consultation (en particulier les *codices* arabes). Les raisons de cette difficulté sont multiples et font qu'elles subissent un catalogage approximatif dans les bibliothèques : leur nombre important, leur piètre qualité de fabrication, leur état incomplet ou lacunaire, leur référencement anonyme ou sous un nom d'auteur inconnu, la mauvaise connaissance de leur contenu par les érudits[6].

Dans le meilleur des cas et depuis peu[7], quelques-uns de ces textes ont bénéficié d'une édition (critique si les manuscrits connus rendaient la tâche possible), d'une traduction accompagnée d'une analyse mathématique centrée sur le problème comme unité textuelle (les énoncés tels que nous les avons présentés ci-dessus). C'est à partir de l'analyse mathématique de ces problèmes que l'histoire des textes et notamment les hypothèses de transmission ont été établies. Donnons l'exemple de la comparaison des treize premiers problèmes du *Liber mensurationum* d'Abū Bakr réalisée par H.L.L. Busard en prenant comme éléments de comparaison un couple de tablettes babyloniennes et le *Liber embadorum* de Platon de Tivoli (adaptation latine du texte hébraïque d'Abraham bar Ḥiyya).

Le tableau ci-dessus confirme bien la conception du problème (énoncé et données numériques) comme seule unité élémentaire de comparaison des textes entre eux avec la recherche systématique

[6] Par exemple, dans *Les bibliothèques au Maroc*, la confusion dans le sens de *taksīr* et la méconnaissance du corpus amènent son auteure à classer le poème du polymathe Ibn Liyūn parmi les travaux sur les fractions (*kasr*) plutôt que sur le mesurage [16, p. 100].

[7] Pour les mathématiques arabes, c'est sans doute A.S. Saidan qui le premier, avec [17], a montré l'intérêt des textes issus de la pratique de l'arithmétique. Quant à la géométrie, ce sont les travaux d'A. Djebbar qui ouvrent la voie avec l'édition et l'analyse du manuscrit de l'*Épître sur le mesurage* d'Ibn ^{c}Abdun [7, 8]. Pour l'Europe, c'est à G. Beaujouan, constamment préoccupé par la relation entre les sciences et les techniques, que l'on doit ce type de réflexion sur les mathématiques pratiques [18]. Néanmoins, une analyse détaillée du corpus latin de géométrie de la mesure reste à établir, avec ses liens avec le corpus arabe et hébraïque.

Tableau 2. Comparaison en termes de séries de problèmes.

Tablettes mésopotamiennes D'après la numérotation de Thureau-Dangin [20]	**Abū Bakr** D'après la numérotation de Moyon [2]	**Abraham bar Ḥiya** D'après la numérotation de Curtze [21]
	LM#1	II.2
	LM#2	II.8
BM 13 901, #1	LM#3	
BM 13 901, #23	LM#4	II.11
BM 13 901, #2	LM#5	
BM 13 901, #16	LM#6	II.10
	LM#7	
	LM#8	
	LM#8'	
	LM#9	II.12
AO6484, #8	LM#10	II.9
	LM#11	
	LM#12	
	LM#13	

des dérivations des problèmes les uns par rapport aux autres, en posant la question des origines comme centrale. C'est aussi ce qui conduit W. Van Egmond à sortir les problèmes (géométriques mais pas seulement) de leurs contextes d'écriture pour tracer les filiations éventuelles dans une perspective transculturelle. La citation suivante permet de comprendre le programme raisonné de Van Egmond :

> *Clearly, identifying problems for the purpose of tracing influences cannot be based entirely on their specific texts, the particular situations they pose, or their mathematical form alone; it must instead be based on some combination of all those features that characterize a particular problem. Only a comparison based on these essential features will allow us to identify true similarities and differences among problems and so trace their common lineage.* [19, p. 385]

Les éléments essentiels sont au nombre de cinq : la situation du problème, l'énoncé, la forme mathématique, la méthode de résolution (si elle est donnée), la démonstration ou la vérification (si elle existe). Ces éléments caractérisent le problème pris isolément et cette typologie est indubitablement pertinente dans le cas de textes construits comme collection de problèmes déconnectés les uns des autres, ce qui n'est pas le cas dans la majorité du corpus de géométrie de la mesure.

Reprenons l'étude de Busard présentée ci-dessus, les treize problèmes choisis à partir du texte d'Abū Bakr ne sont pas strictement consécutifs. Quid des problèmes manquants [Abū Bakr #7, #8, #8' #11] ? Ils ne seraient présents dans aucun document babylonien connu, ni chez Platon de Tivoli. Mais, on peut se demander les raisons pour lesquelles Abū Bakr les expose, et surtout y a–t-il une raison qui ordonneraient ces problèmes les uns par rapport aux autres. En outre, si les problèmes se suivent chez Abū Bakr, ils apparaissent dans deux tablettes d'époque très différente[8] pour la première colonne, et ne correspondent à aucune liste ordonnée de problèmes dans le *Liber Embadorum* [Platon de Tivoli, #1, #8, #11, #10, #12, #9]. Que conclure (*cf.* Tableau 2) ? Alors que le tableau semble montrer une certaine linéarité dans la transmission des textes de géométrie de la mesure entre l'époque babylonienne et le Moyen Âge latin, en réalité, dans le meilleur des cas, il ne montre que l'existence de problèmes similaires à des époques différentes et chez des auteurs distincts.

[8] La BM 13 901 est paléo-babylonienne (environ XXI^{e}-XVI^{e} s. av J.C.) alors que la tablette AO 6484 est du temps des Séleucides (IV^{e}-I^{er} s. av. J.C.). Dans ses commentaires, Busard accentue la confusion entre les tablettes en décrivant « la méthode babylonienne » pour des calculs effectués à plus d'une dizaine de siècles d'intervalle.

2. La notion de « série de problèmes » dans les textes de géométrie de la mesure

2.1 La démarche. Pourquoi ?

Si l'on considère le corpus de géométrie de la mesure dans sa globalité (toutes aires géographiques et culturelles confondues), de nombreux problèmes se retrouvent d'un texte à l'autre ; ce qui a permis à plusieurs historiens d'établir l'histoire d'un problème à travers les âges à l'image de Van Egmond par exemple. Mais, dans le cas d'un corpus mathématique aussi élémentaire qui est empreint de traditions locales, de pratiques sociales réelles (d'arpentage ou d'enseignement pour ne citer que ces deux exemples), est-ce si étonnant ? En mentionnant les emprunts à la tradition locale, nous irions plutôt dans le sens d'un particularisme mais il n'est en réalité que très relatif. En effet, les calculs d'aires des figures planes usuelles (carré, rectangle, triangle, autres quadrilatères, cercle et figures circulaires) ou de volumes de solides usuels sont-ils des situations suffisamment riches pour permettre des inventions significatives, ou ne sont-ils « que » des invariants de l'histoire (en référence à P. Veyne [22]) ? Y a-t-il alors, dans ce contexte, des arguments assez forts pour justifier les éventuelles filiations textuelles ? En d'autres termes, si l'on peut assurer des points communs entre deux auteurs, entre deux textes, voire remonter à des ancêtres communs, est-il vraiment possible d'assurer une conclusion positive ?

Notre volonté, dans le cadre du projet de recherche « séries de problèmes », a justement consisté à prendre le contre-pied de l'historiographie traditionnelle en nous intéressant à autre chose que le contenu strict des problèmes comme seule trace d'éventuelles transmission ou réception. Mais, en adoptant un point de vue structuraliste à partir des séries composées de problèmes, cela implique qu'un problème ne peut pas être considéré comme déconnecté des autres problèmes appartenant à la même série mais plutôt en cohérence avec ceux-ci. La série de problèmes est donc une sous-collection ordonnée de problèmes selon un (ou des) principe(s) que nous tentons maintenant d'identifier.

Il nous semble qu'il existe au moins deux niveaux de séries de problèmes. Pour un premier niveau, les textes de géométrie de la mesure sont organisés, au sein de leur partie mesurage, en deux temps : d'abord les surfaces planes, ensuite les corps solides. À l'intérieur de ces deux grandes divisions, les surfaces et les corps sont ordonnées en séries de problèmes thématiques en fonction de la surface ou du corps abordé. Par exemple, dans le *Liber mensurationum* d'Abū Bakr, les surfaces planes sont organisées en chapitres : le carré (19 problèmes), le rectangle (33), le losange (12), le trapèze isocèle (16), le trapèze quelconque (16), le trapèze rectangle (12), le trapèze obtusangle (6), le triangle équilatéral (6), le triangle isocèle (8), le triangle scalène acutangle (9), le triangle rectangle (9), le triangle obtusangle (5), le cercle (2), le demi-cercle (1), la portion plus grande que le demi-cercle (1), la portion plus petite que le demi-cercle (1). L'étude de cette série de figures est déjà porteuse de sens car l'auteur a consciemment choisi de suivre un ordre précis qui est soit géométrique, soit lié à la nature des calculs à réaliser. Lorsque les copies manuscrites présentent des diagrammes géométriques, qu'ils soient en marge ou intégré au texte, ils n'accompagnent pas chaque problème mais bien la série de problèmes (sauf bien sûr lorsque la série est réduite à un seul et unique problème[9]). Chaque série est alors accompagnée d'une figure qui est placée à la fin de celle-ci, et sur laquelle sont inscrites les grandeurs géométriques données et cherchées. Le diagramme est alors un prototype complet de la figure travaillée. Ces séries ne sont pas discernables seulement par le sens mathématique. En effet, en fonction des copies, les études codicologiques et paléographiques peuvent permettent (mais pas nécessairement) de distinguer des problèmes entre eux et des séries de problèmes entre elles, comme sur cette colonne de manuscrit (*cf*. Fig. 2). Il faut naturellement être vigilant car inutile de rappeler ici que le document que nous avons sous les yeux n'est pas nécessairement conforme aux volontés originelles de l'auteur mais est le résultat de bien des interprétations des copistes et de l'éventuel traducteur.

---

[9] Notons que c'est très souvent le cas dans la partie stéréométrique des ouvrages étudiés.

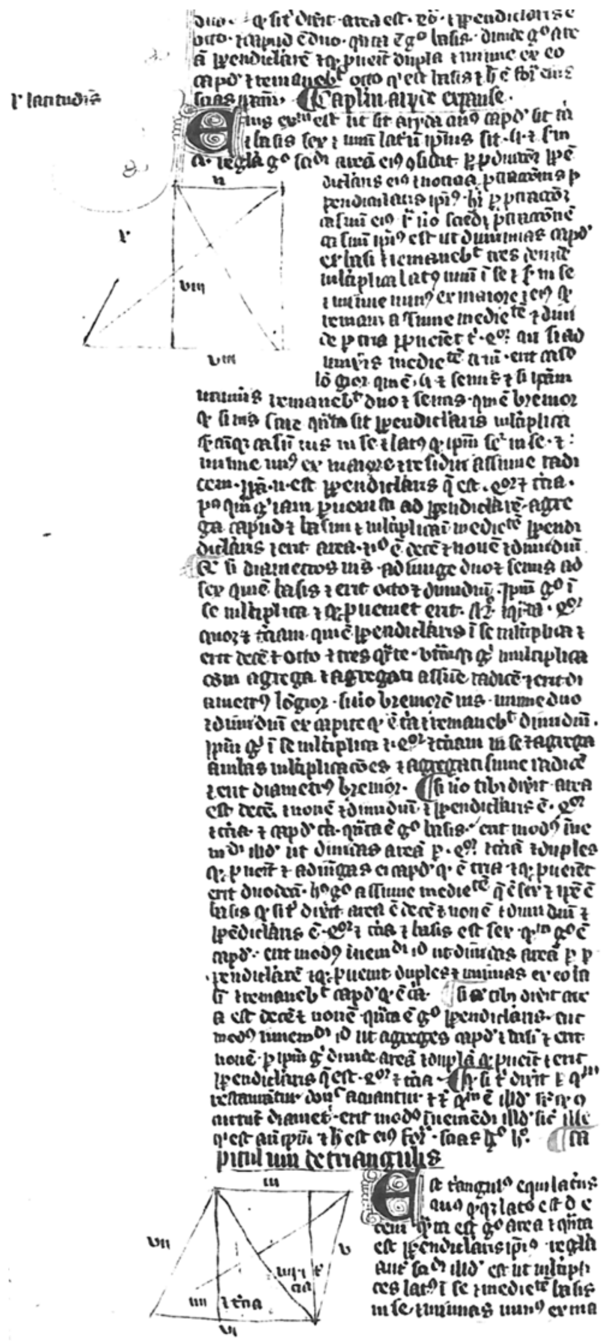

Figure 2. Cambridge, University Library, Mm2.18, fol.74a. Remerciements aux Syndics of Cambridge University Library.

Tableau 3. Exemple de la série de trois problèmes sur le losange chez Abū Bakr.

<table>
<tr><td colspan="3">Losange de côté c, de grande (resp. petite) diagonale D (resp. d) et d'aire A.</td></tr>
<tr><td>Problème</td><td>Grandeurs données</td><td>Grandeurs cherchées</td></tr>
<tr><td>[Abū Bakr #54]</td><td>c, D</td><td>d</td></tr>
<tr><td>[Abū Bakr #55]</td><td>c, d</td><td>D</td></tr>
<tr><td>[Abū Bakr #56]</td><td>d, D</td><td>c</td></tr>
</table>

Tableau 4. Séries de problèmes sur le trapèze obtusangle.

<table>
<tr><th>Ibn ᶜAbdūn</th><th>Abū Bakr</th><th>Abraham Bar Ḥiyya</th><th>Platon de Tivoli</th></tr>
<tr><td colspan="2">$s = 3$, $B = 6$, $c_1 = 5$; $c_2 = 7$</td><td colspan="2">$s = 14$, $B = 21$, $c_1 = 15$; $c_2 = 20$</td></tr>
<tr><td>A84 : définition</td><td></td><td>#90 : définition</td><td></td></tr>
<tr><td>A85 : p, P ?</td><td rowspan="3">LM#105 : p, P, h, A ?</td><td rowspan="2">#91 : p, P, h ?</td><td>#C19 : p, P ?</td></tr>
<tr><td>A86 : h ?</td><td>#C20 : h ?</td></tr>
<tr><td>A87 : A ?</td><td rowspan="2">#92 : A ? avec la preuve</td><td>#C21 : A ?</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>#C22 : preuve</td></tr>
<tr><td>A88 : D ?</td><td rowspan="2">LM#106 : D, d ?</td><td rowspan="2">#93 : D, d ?</td><td rowspan="2">#C23 : D, d ?</td></tr>
<tr><td>A89 : d ?</td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td>LM#107 : B ?</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>LM#108 : s ?</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>LM#109 : h ?</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>A90 : restauration</td><td>LM#110 : restauration</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>#93a : cas part.</td><td>#C24 : cas part.</td></tr>
</table>

Le deuxième niveau se situe à l'intérieur même des chapitres considérés. Pour une même figure, des problèmes seront présentés les uns après les autres selon une logique plus ou moins apparente. Le plus souvent, ces problèmes sont issus de diverses variations des grandeurs données par rapport aux cherchées (*cf*. Tableau 3 ou [Abū Bakr #107, #108, #109] *in* Tableau 4). Les auteurs construisent aussi des séries en s'inspirant des relations métriques entre les grandeurs en présence (par exemple, grâce au théorème de Pythagore associant trois grandeurs par la relation $a^2+b^2= c^2$, se donner la somme des carrés de a et b équivaut à se donner le carré de c), ou avec les problèmes de séparation (dans une certaine configuration, $a + b$ est donnée et il s'agit de déterminer a et b séparément). Notons ici que ces variations sont extrêmement présentes dans le cas des figures planes, mais largement moins exploitées dans la partie sur les corps solides.

2.2 En réalité. . . les difficultés

Plusieurs difficultés sont apparues dans l'étude par les « séries de problèmes » des textes de géométrie de la mesure. Nous aimerions faire état des plus importantes.

La première difficulté est liée aux arguments traditionnels de l'histoire des textes. En effet, ces textes ont été rédigés dans un certain environnement que l'on a souvent bien du mal à décrire, ont été copiés dans des contextes relativement indicibles, et pour certains d'entre eux ont été traduits avant d'être à nouveau copiés. Ce sont certes ces différentes phases qui ont assuré la circulation de ces textes jusqu'à leur survie, mais de nombreuses raisons nous poussent à croire que ces textes ont indéniablement souffert d'éventuels remaniements, résultats des différentes lectures réalisées avant leur étude récente.

Même si les séries de problèmes sont repérables aussi bien scientifiquement que formellement, sont-elles réellement des créations de leurs auteurs, ou le résultat des lectures successives qui ont pu provoquer des ajouts et des réorganisations.

La seconde difficulté est d'ordre méthodologique. Nous sommes fortement dépendant des éditeurs et leurs choix éditoriaux. En effet, pour repérer les séries de problèmes, il est souvent nécessaire de repenser le découpage des textes édités en fonction de notre propre définition du problème. En effet, si, dans la plupart de la tradition manuscrite (arabe ou latine), les chapitres sont repérés par des titres (*cf.* ci-dessus), les problèmes quant à eux sont, le plus souvent, formellement inséparables les uns des autres.

Enfin, si l'on poursuit l'objectif de l'étude des filiations éventuelles des textes (et pas seulement d'un problème particulier) en confrontant le corpus antique (notamment héronien et pseudo-héronien[10]), le corpus arabe, le corpus hébraïque et le corpus latin pour ne se limiter qu'aux abords de la méditerranée, c'est la gestion de l'abondance des sources (manuscrites et éditées) qui fait problème. Il ne s'agirait pas de circonscrire l'étude à un ou deux textes, cela n'aurait pas de sens. C'est donc un programme de travail qui est doucement en train de se dessiner ici.

3. Exemples de « séries de problèmes » dans le *Liber mensurationum* d'Abū Bakr

Plusieurs exemples de problèmes et de séries de problèmes ont d'ores et déjà été donnés ci-dessus. Cette dernière partie n'a pas d'autres objectifs que de montrer, dans le seul cas du *Liber mensurationum*, des séries de problèmes qui nous permettent de faire quelques hypothèses sur la rédaction du texte tel qu'il nous est parvenu.

Le premier exemple est relatif au trapèze obtusangle dont les grandeurs caractéristiques sont B la base du trapèze, s son sommet (ou petite base), h sa hauteur, c_1 et c_2 les deux côtés non-parallèles ($c_1 < c_2$), p (resp. P) la projection du plus petit (resp. grand) côté non-parallèle sur sa base, d (resp. D) sa petite (resp. grande) diagonale et A son aire. Le Tableau 4 reprend la série de problèmes identifiée avec des éléments de comparaison de la même série dans trois autres textes. Ces textes ont été choisis pour des raisons historiographiques. Depuis l'édition de la *risālat fī t-taksīr* [Épître sur le mesurage] d'Ibn ᶜAbdūn [7, 8], il est communément admis que le texte d'Abū Bakr en dérive (sans que l'on sache vraiment comment). Par ailleurs, les liens entre les auteurs des trois dernières colonnes sont aussi très forts dans les études modernes : Platon de Tivoli traduit une version du *Ḥibbūr ha-Meshīḥāh we ha-Tishbōret* [Livre de la surface et de la mesure] d'Abraham bar Ḥiyya, et est contemporain de Gérard de Crémone, lui-même traducteur du texte d'Abū Bakr. Nous devons enfin ajouter qu'Abū Bakr et Platon de Tivoli seraient d'importantes sources, directes ou indirectes, pour la rédaction par Fibonacci de sa *Practica Geometriae*.

Ce tableau montre donc qu'avec les problèmes #107, #108 et #109, Abū Bakr fait varier les données et cherchées pour créer de « nouveaux » problèmes (qui sont peut-être présents dans d'autres sources d'Abū Bakr). Cette attitude ne se retrouve pas dans cette série-là des autres textes mentionnés. Par ailleurs, dans cette même série, Abraham bar Ḥiyya (et donc Platon de Tivoli) décide d'inclure la preuve du calcul de l'aire d'un trapèze obtusangle là où les deux autres restent muets. Leurs objectifs éditoriaux sont manifestement différents. Enfin, d'un point de vue historiographique, nous avons déjà mentionné la différence de perception de cette preuve : M. Curtze décide d'en faire un problème séparé [21, p. 90–92] alors qu'en suivant la lecture de M. Guttman [23], Millas I Vallicrosa l'inclut dans le problème concerné [11, p. 69].

---

10 *Cf.* l'étude de B. Vitrac dans le présent ouvrage.

Tableau 5. Séries de problèmes sur le trapèze rectangle.

Numéro de problèmes d'après [2]	Données	cherchées
[Abū Bakr #95]	$s = 2$, $B = 8$, $h = 8$, $c = 10$.	A ?
[Abū Bakr #96]	$s + B = 10$, $h = 8$, $c = 10$.	s, B ?
[Abū Bakr #97]	$A = 40$, $h = 8$, $s = 2$.	B ?
[Abū Bakr #97']	$A = 40$, $h = 8$, $B = 8$.	s ?
[Abū Bakr #98]	$s + B = 10$, $c = 10$, $h = 8$.	s, B ?
[Abū Bakr #99]	$s = 2$, $h = 8$, $B = 8$.	D, d ?
[Abū Bakr #100]	$s = 2$, $B = 8$.	Restauration du trapèze.
[Abū Bakr #101]		intersection des diagonales sur la hauteur.
[Abū Bakr #102]	$c = 10$, $h = 8$, $B = 8$, $s = 2$.	Restauration du trapèze.
[Abū Bakr #103]	$s + B = 10$, $h + c = 18$, $A = 40$.	h, c, B, s ?
[Abū Bakr #104]	A connue [= 40], $h = 8$, $B = 8$.	s ?
[Abū Bakr #104']	$A = 40$, $h = 8$, $s = 2$.	B ?

Le second et dernier exemple concerne la série de douze problèmes sur le trapèze rectangle de base B, de sommet s, de côté incliné c, de hauteur h, et de diagonales D, d. Son aire est A.

D'abord, dans cette série, nous pouvons repérer deux problèmes surdéterminés au sens où certaines grandeurs inutiles (et inutilisées dans la procédure) sont données ; elles sont repérées en rouge dans le tableau.

Ensuite, les premiers problèmes de la série sont classiques : après avoir calculé l'aire A de la figure faisant intervenir $s + B$, suit un problème de séparation de s et B, puis deux variations pour déterminer d'abord B (connaissant A, h, s), puis s (connaissant A, h, B). Si l'on suit la série, les problèmes suivants seraient ceux du calcul des diagonales puis les problèmes de restauration du trapèze[11] qui auraient dû clore la série [Abū Bakr #99, #100, #101].

Mais, ce n'est pas tout à fait ce qu'on observe. D'abord, les deux problèmes [Abū Bakr #96, #98] sont les mêmes, c'est-à-dire qu'on demande de calculer les mêmes grandeurs avec les même données initiales. Toutes les étapes de [Abū Bakr #98] sont des répétitions de [Abū Bakr #96] mais pas philologiquement (si bien que l'argument du saut du même au même ne tient pas) :

> [Abū Bakr #96] *Et si on te dit : tu as ajouté le sommet et la base et il en résulte dix, la hauteur est huit, et le côté dix. Quel est le sommet et quelle est la base ? Le procédé pour déterminer cela consistera à multiplier le côté par lui-même, la hauteur par elle-même, et à retrancher le plus petit du plus grand, il restera trente-six. Prends donc sa racine [carrée] qui est six, et retranche-la de dix – qui est la somme du sommet et de la base –. Il restera quatre. Prends aussi sa moitié et le résultat sera le sommet. Et si tu ajoutes six, il en résulte la base.* [2]

[11] La restauration du trapèze est l'opération géométrique qui consiste à construire le triangle obtenu en prolongeant les côtés obliques du trapèze jusqu'à leur intersection.

> [Abū Bakr #98] *Et si on te dit : tu as ajouté le sommet et la base et il résulte dix, le côté est dix, et la hauteur est huit. Quel est donc le sommet et quelle est la base ? Le procédé pour déterminer cela consistera à multiplier dix par lui-même, la hauteur par elle-même, à retrancher le plus petit du plus grand, à prendre la racine [carrée] du reste, et à la retrancher de dix, et il restera quatre. Prends alors sa moitié qui est deux, et il résultera le sommet. Comprends-le. Ajoute ensuite deux à la racine [carrée] du reste de la diminution du produit de la hauteur par elle-même du produit du côté par lui-même – qui est six –, la base sera huit.* [2]

Ensuite, les problèmes restants [Abū Bakr #102, #103, #104 et #104'] sont aussi des répétitions de [Abū Bakr #100, #98, #97' et #97] soit strictement, soit avec des changements mineurs. Quoiqu'il en soit, aucun argument géométrique ou algorithmique ne justifie la présence de ces quatre derniers problèmes. Nous avons repéré dans le Tableau 5 par un système de couleurs les problèmes qui se répètent.

En conclusion, cette série qui correspond à l'ensemble des problèmes sur le trapèze rectangle interroge par son manque de cohérence et ses redondances évidentes. La version du texte qui nous est parvenue a davantage l'apparence d'une collection de problèmes compilée à partir de différentes sources, sans que l'auteur de cette compilation (qu'il soit Abū Bakr ou non) montre une réelle volonté d'organisation sérielle (en dehors de la seule référence à une même figure) voire sans qu'il montre une bonne compréhension du sujet. Autrement dit, cette série montrerait que, dans un premier temps, l'auteur construit une série de problèmes dans un certain ordre logique. Dans un second temps, il la complète avec des problèmes empruntés d'autres sources sans que les premiers problèmes et leur logique sérielle soient réellement pris en compte.

4. Conclusion

Dans l'état actuel de notre réflexion méthodologique, l'étude des « séries de problèmes » présentes dans les textes de géométrie de la mesure médiévale n'a malheureusement pas encore permis de mettre en place de nouveaux éléments de filiation d'un texte ou d'un auteur à un autre, contrairement à nos objectifs. Cependant, nous avons montré que cette étude peut permettre d'énoncer certaines hypothèses sur l'état d'un texte tel qu'il nous est parvenu, et donc peut-être sur le projet éditorial de l'auteur, du traducteur (s'il y a lieu) ou des copistes successifs, sans que l'on sache encore nécessairement attribuer le rôle à chacun de ces différents acteurs. En particulier, elle permet d'apporter de nouveaux éléments sur la cohérence globale des textes de notre corpus, comme ici à propos du *Liber Mensurationum* d'Abū Bakr, entre compilations réalisées au gré des documents disponibles et successions de problèmes logiquement ordonnées en « séries ».

Références

[1] M. Moyon, « La géométrie de la mesure en Pays d'Islam et ses prolongements en Europe latine (IXe-XIIIe siècles) », in *Mesure et Histoire Médiévale. Actes du XLIIIe congrès de la SHMESP*, 269–280, (Publications de la Sorbonne, Paris, 2013).

[2] Moyon, Marc. « La géométrie pratique en Europe en relation avec la tradition arabe, l'exemple du mesurage et du découpage: contribution à l'étude des mathématiques médiévales ». Thèse. Lille 1, 2008. Consultable en ligne sur le site de l'université : `http://ori.univ-lille1.fr/thematic- search.html?menuKey=these&submenuKey=authors&id=moyon_marc` (consulté 1er Nov. 15).

[3] R. Rashed, *Thābit ibn Qurra. Science and Philosophy in Ninth-Century Baghdad*. (De Gruyter, Berlin – New York, 2009).

[4] R. Rashed, *Les mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècle : Ibn al-Haytham - théorie des coniques, constructions géométriques et géométrie pratique, vol.3*. (Al-Furqān Islamic Heritage Foundation, Londres, 2000).

[5] M. Díaz-Fajardo, “Ibn al-Raqqām’s Notes on Practical Geometry”, *Suhayl. J. Hist. Exact Nat. Sci. Islam. Civilis.* **11**, 117–145 (2012).

[6] M. Moyon, « Ibn Liyūn at-Tujībī (1282-1349) : un nouveau témoin de la science du mesurage en Occident musulman », in *Actes du 11ᵉcolloque maghrébin sur l’histoire des mathématiques arabes (Alger, 26-28 octobre 2013)*, M. Bouzari, Éd. (Alger, à paraître).

[7] A. Djebbar, « Ar-Risāla fī t-taksīr li Ibn ᶜAbdūn, shāhid ᶜalā al-mumārasāt as-sābiqa li t-taqlīd al-jabrī al-ᶜarabī [L’épître sur le mesurage d’Ibn cAbdūn, un témoin des pratiques antérieures à la tradition algébrique arabe] », *Suhayl. J. Hist. Exact Nat. Sci. Islam. Civilis.*, **5**, 768 [partie arabe] (2005).

[8] A. Djebbar, “Ibn ᶜAbdūn’s Epistle on Surface Measuring: a witness to the pre-Algebraical Tradition”, *Suhayl. J. Hist. Exact Nat. Sci. Islam. Civilis.*, **6**, 255–257 [partie anglaise], 81–86 [partie arabe] (2006).

[9] J. Sesiano, “Abū Kāmil’s Book on Mensuration”, in *From Alexandria, Through Baghdad. Surveys and Studies in the Ancient Greek and Medieval Islamic Mathematical Sciences in Honor of J.L. Berggren*, N. Sidoli et G. V. Brummelen, Éd., 359408 (Springer, Berlin Heidelberg, 2014).

[10] J. P. Hogendijk, “A medieval arabic treatise on mensuration by Qāḍī Abū Bakr”, *Z. Für Gesch. Arab.-Islam. Wiss.*, **6**, 130–150 (1990).

[11] Abraham Bar Ḥiyya, *Llibre de geometria, Hibbur hameixiha uehatixboret* (Editorial Alpha, Barcelone, 1931).

[12] B. Boncompagni, *La practica geometriae di Leonardo Pisano* (Tipografia delle scienze matematiche e fisiche, Rome, 1862).

[13] B. Hughes, *Fibonacci’s De Practica Geometrie* (Springer, New York, 2008).

[14] H. L. L. Busard, *Johannes de Muris, De arte mensurandi: a geometrical handbook of the fourteenth century* (F. Steiner Verlag, Stuttgart, 1998).

[15] H. L. L. Busard, « L’algèbre au moyen-âge, le “Liber mensurationum” d’Abu Bakr », *Journal des Savants*, 65–125 (1968).

[16] L. Benjelloun-Laroui, *Les bibliothèques au Maroc*. (Maisonneuve & Larose, Paris, 1990).

[17] A. S. Saidan, *Tārīkh ᶜilm al-ḥisāb al-ᶜarabī [Histoire de la science du calcul arabe]* (Assocation des Ouvriers des Imprimeries coopératives, Ammam, 1971).

[18] G. Beaujouan, *Par raison de nombres l’art du calcul et les savoirs médiévaux*. Aldershot: Variorum (1991).

[19] W. Van Egmond, “Types and Traditions of Mathematical Problems”, in *Mathematische Probleme im Mittelalter. Der lateinische und arabische Sprachbereich*, M. Folkerts, Éd., 379–428 (Harrassowitz Verlag, Wiesbaden, 1996).

[20] F. Thureau-Dangin, *Textes mathématiques babyloniens* (E.J. Brill, Leide, 1938).

[21] M. Curtze, “Der “Liber Embadorum” des Savasorda in der Übersetzung des Plato von Tivoli”, *Urkunden Zur Gesch. Math. Im Mittelalt. Renaiss.* **12**, 1–183 (1902).

[22] P. Veyne, *Comment on écrit l’histoire* (Éditions du Seuil, Paris, 1996).

[23] Abraham Bar Ḥiyya, *Chibbur ha-Meschicha we ha-Tischboreth* (Schriften des Vereins Mekize Nirdamin, Berlin, 1912).