SHS Web of Conferences **82**, 01003 (2020) https://doi.org/10.1051/shsconf/20208201003
SCAN'20

Les théories de la statique graphique revisitées par les approches numériques. De l'évaluation structurale paramétrique à la morphogénèse

The theories of graphic statics revisited by digital approaches. From parametric structural evaluation to morphogenesis

Thierry Ciblac*

GSA, ENSA Paris-Malaquais, 75006 Paris, France

Résumé. Au-delà de son caractère calculatoire qui l'a initialement popularisée, la statique graphique présente des potentialités diverses pouvant être valorisées par l'usage de l'informatique, dans les domaines de la pédagogie et de la conception de structures. L'objectif de cet article est de montrer comment la statique graphique est ou pourrait être revisitée par des transpositions numériques, dont certaines sont proposées par l'auteur. Dans une première partie, nous présentons les théories de la statique graphique des plus classiques aux moins utilisées que des transpositions numériques peuvent mobiliser. La deuxième partie vise à caractériser les objectifs des transpositions numériques effectives ou potentielles et leurs apports spécifiques.

Mots-clés. Statique graphique, dualité, géométrie dynamique, morphologie structurale, maçonnerie.

Abstract. Beyond the calculating character that initially popularized it, graphic statics presents various potentialities that can be enhanced by the use of computers, in the fields of pedagogy and structural design. The purpose of this paper is to show how graphic statics is or could be revisited by digital transpositions, some of which are proposed by the author. In a first part, we present the theories of graphic statics from the most classical to the least used that digital transpositions can mobilize. The second part aims to characterize the objectives of actual or potential digital transpositions and their specific contributions.

Keywords. Graphic statics, duality, dynamique geometry, structural morphology, massonry.

*thierry.ciblac@paris-malaquais.archi.fr

1. Introduction

Antérieurement à la large diffusion des calculatrices électroniques dans les années 1970, puis des ordinateurs dans les années 1980, le calcul graphique a été largement utilisé dans les domaines scientifiques et techniques en substitution ou en complément des méthodes de calculs algébriques et analytiques (Tournès, 2000). Ainsi, la statique graphique a été un moyen de calcul abondamment employé pour dimensionner les structures dans le dernier tiers du XIXe et une partie du XXe siècle.

La possibilité de résoudre des problèmes d'équilibre de forces sans passer par des systèmes d'équations mais en utilisant uniquement des constructions géométriques a contribué à sa large diffusion auprès des praticiens. Parmi les avantages pratiques de cette approche, on peut citer la facilité de mise en œuvre avec un faible bagage mathématique, les multiples contrôles de la cohérence des constructions facilitant la détection visuelle des erreurs et une précision suffisante pour les applications constructives (Chatzis, 2004). Ces avantages, purement liés à la pratique calculatoire, ont perdu tout leur intérêt avec l'usage des ordinateurs et des logiciels de calcul mécaniques. La fiabilité des calculs et leur précision est assurée par la machine et le logiciel et les sources d'erreurs sont généralement « limitées » à la gestion des données d'entrée et de sortie. A partir de ce moment, l'enseignement de la statique graphique et des autres méthodes de calcul graphique a en conséquence progressivement décliné. L'inventaire des traités de calcul graphique publiés entre 1870 et 1989, est un indicateur de ce déclin (Tournès, 2000). Ainsi entre 1870 et 1969 ce recensement montre une production régulière avec en moyenne 46 traités par décennie. Dans la décennie 1970-79 seuls 11 traités ont été recensés et 3 dans la décennie suivante dont aucun en statique graphique (Tournès, 2003).

La statique graphique a ainsi perdu sa place centrale dans les enseignements professionnels et plus encore dans l'enseignement supérieur. Sa présence a généralement, au mieux été limitée à quelques propos illustratifs sur les polygones funiculaires et la méthode de Cremona, ou bien a totalement disparu. Malgré cette désaffection, à partir de la fin des années 1990 on peut observer l'apparition d'ouvrages sur la statique graphique à destination des ingénieurs et des architectes où les questions pédagogiques liées à la compréhension et à la conception des structures tiennent une place centrale. On peut citer par exemple les ouvrages de (Zalewski & Allen, 1998) (Zalewski & Allen, 2009). Parallèlement, depuis le début des années 2000, des recherches sur des approches informatiques s'appuyant sur la statique graphique et ses fondements théoriques se développent dans la communauté des concepteurs de structures et en architecture. Les retombées de ces recherches concernent en particulier la conception des structures réticulées, à câbles, des maçonneries. Ce dynamisme et cette diversité d'applications a donné lieu à de nombreuses publications et notamment à la parution en 2016 d'un numéro spécial consacré aux méthodes graphiques de conception structurale de l'*International Journal of Space Structures* (Block, Fivet, & Van Mele, 2016). Il apparaît ainsi, qu'au-delà des aspects qui l'ont initialement popularisée comme outil de calcul graphique sur papier, la statique graphique présente des potentialités diverses pouvant être valorisées par l'usage de l'informatique, dans les domaines de la pédagogie et de la conception de structures. L'objectif de cet article est de montrer comment la statique graphique est ou pourrait être valorisée par des transpositions numériques dont certaines sont proposées par l'auteur. Pour cela, dans une première partie, nous présentons les théories de la statique graphique des plus classiques aux moins utilisées que des transpositions numériques peuvent mobiliser. La deuxième partie vise à caractériser les objectifs des transpositions numériques effectives ou potentielles et leurs apports spécifiques.

2. Théories de la statique graphique dans le plan et l'espace

La statique graphique est une méthode géométrique permettant le calcul des systèmes de forces en équilibre dans le plan. Elle s'appuie sur le principe du parallélogramme des forces, dont l'introduction est attribuée à Simon Stévin en 1586. Ce principe permet la construction des polygones des forces et des polygones funiculaires dont l'introduction peut être attribuée à Pierre Varignon en 1687 (Varignon, 1725). Des approches géométriques ont été développées par Govani Poleni (Poleni, 1748) et d'autres scientifiques, avec notamment la contribution de Jean-Victor Poncelet autour de 1830 dont les développements et enseignements de ne connurent qu'une très faible diffusion (Chatzis, 2004). Les contributions de (Rankine, 1858) et (Maxwell, 1864) sur les figures réciproques ont aussi contribué au développement de la statique graphique au travers des propriétés de dualité. Cependant sa constitution comme discipline à part entière est généralement attribuée à Carl Culmann dont l'ouvrage « Die graphische Statik » (Culmann, 1866) connut une très large réception internationale. Les approches spatiales mobilisant les concepts ou les méthodes de la statique graphique se sont heurtées à des difficultés de mise en œuvre et ont parfois été inutilisables dans la pratique et oubliées. Elles présentent cependant des intérêts théoriques et des modes de représentation qui ont été ou pourraient être exploités par des moyens numériques. Le théorème de Rankine sur l'étude des structures polyédriques (Rankine, 1864) est un exemple d'approche tridimensionnelle mobilisant la dualité mais dont les applications pratiques demeurèrent inexistantes. Les problèmes spatiaux peuvent se ramener aux problèmes classiques traités par la statique graphique dans le plan en considérant des projections planes. Une approche possible s'appuie sur l'usage de la géométrie descriptive comme par exemple par Föppl (Föppl, 1892). Dans ce cas, aucune théorie de statique graphique proprement spatiale n'est mobilisée, seules les méthodes de la géométrie descriptive contribuent à résoudre le problème dans l'espace. Une approche différente et originale visant à transposer plus largement les concepts de la statique graphique à l'espace a été proposée par Benjamin Mayor mais sa diffusion et son usage effectif demeurèrent limitées (Ciblac, 2018). Nous la présentons ici comme une piste potentielle de transposition numérique. Les sections suivantes présentent succinctement ces théories donne des exemples de transposition numériques.

2.1 Polygones funiculaires et polygones des forces

La statique graphique s'appuie sur une double représentation dans le plan permettant de traiter les problèmes d'équilibre des systèmes de forces. Les polygones funiculaires permettent de traduire les relations sur la nullité des sommes de moments et les polygones des forces sur la nullité des sommes de forces. La figure 1 donne un exemple de deux polygones funiculaires (à gauche) associés à deux polygones des forces (à droite) pour un même système de 5 forces. Le polygone funiculaire passant par M peut être interprété comme la forme prise par un câble tendu en équilibre sous l'action de 5 forces, et celui passant par N comme celle d'un arc comprimé sous l'action de ces mêmes forces. La lecture des polygones des forces donne un accès direct à l'intensité et au sens de l'ensemble des efforts dans éléments de structure. Cette application classique de la statique graphique permet la recherche de formes purement tendues ou purement comprimées.

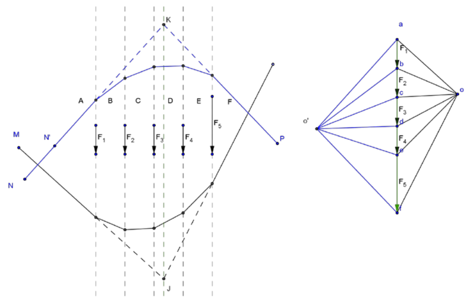

Figure 1. Polygones funiculaires et polygones des forces dans le cas de 5 forces parallèles.

2.2 Dualité des figures planes : théorèmes de Rankine et de Maxwell

En 1858, Rankine généralise le concept de polygone funiculaire à l'équilibre des structures polygonales réticulées (polygonal frames) (Rankine, 1858, p. 139-140). Il décrit en particulier les relations réciproques entre l'ensemble formé par les forces appliquées aux nœuds et les efforts dans les barres et l'ensemble des polygones des forces. En 1864, Maxwell, généralise le résultat de Rankine (Maxwell, 1864, p. 250-259). Il s'attache à caractériser les propriétés géométriques des figures réciproques pour ne traiter que dans un deuxième temps leurs applications aux diagrammes de forces. La démarche est fondée sur la dualité, c'est-à-dire l'ensemble des relations réciproques associant une figure à une autre. Cremona développe cette approche duale pour calculer les structures réticulées (Cremona, 1872). La figure 2 donne un exemple de calcul de poutre réticulée avec à gauche la structure et les forces appliquées aux nœuds et à droite les polygones des forces donnant une visualisation synthétique de l'équilibre des forces en chaque nœud de la structure. L'usage de la notation de Bow facilite la lecture des diagrammes en associant les nœuds des polygones des forces aux zones délimitée par les barres et les forces extérieures de la structure réticulée. Un effet induit par la dualité est la possibilité d'interpréter la figure des forces comme une structure et réciproquement. Cette propriété peut donner accès à des morphologies structurales inattendues.

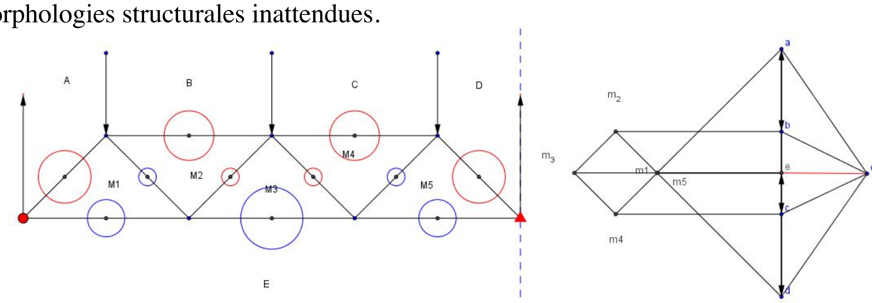

Figure 2. Exemple de calcul de poutre réticulée avec à gauche la structure et les forces appliquées aux nœuds et à droite les polygones des forces.

2.3 Théorème de Rankine sur l'équilibre de structures polyédriques et polyèdres réciproques de Maxwell

Rankine a publié en 1864 un théorème sur l'équilibre des structures polyédriques réticulées (Rankine, 1864). Lévy décrit ce théorème dans un paragraphe intitulé « polyèdre funiculaire de Rankine, sa complication » : « Rankine a considéré, à l'égard des forces de l'espace, ce qu'il a appelé des polyèdres funiculaires. Le polyèdre funiculaire de Rankine est fondé sur ce théorème facile à établir : Des forces concourantes, normales aux faces d'un polyèdre fermé et proportionnelles aux aires de ces faces, forment un système en équilibre. Mais la conception de Rankine, qui conduit à représenter les forces par des aires et à considérer dans l'espace des figures formées d'une suite de cellules polyédrales accolées comme les cellules d'une ruche, n'a pas eu jusqu'ici d'applications : nous ne nous y arrêterons donc pas.» (Lévy, 1886, p. 431). En 1864, Maxwell, explicite et exemplifie ce théorème de Rankine sur les figures polyédriques réciproques en 3 dimensions (Maxwell, 1864, p. 260-261). Il donne la définition de figures réciproques en trois dimensions : des figures sont réciproques quand chaque ligne de l'une est perpendiculaire à une face plane de l'autre, et quand chaque point de concours des lignes de l'une est représenté par un polyèdre fermé à face plane. Il indique de plus que la plus simple des figures correspondant à cette définition est composée de cinq points de l'espace connecté par 10 lignes formant 10 faces triangulaires et 5 tétraèdres. La figure réciproque décrite par Rankine serait donc formée à partir des centres des 5 sphères circonscrites à ces 5 tétraèdres. Avec les moyens numériques, la complication de la mise en œuvre de ces théorèmes n'est plus un obstacle à leur application, ainsi (Akbarzadeh, Van Mele, & Block, 2015) s'appuient sur ces théorèmes pour proposer une implémentation destinée à la conception de structures spatiales purement comprimées ou purement tendues.

2.4 La statique graphique des systèmes de l'espace de Benjamin Mayor

A partir de 1896, Benjamin Mayor, professeur à Lausanne, développe une approche tridimensionnelle des problèmes de statique appelée « statique graphique des systèmes de l'espace » dont le premier objectif vise à étendre à l'espace les méthodes de la statique graphique. L'approche est fondée sur la *géométrie réglée*, caractérisée par la place centrale donnée à la droite et par ses propriétés de dualité. Elle permet de transformer un problème spatial en un problème plan pouvant être traité par les méthodes classiques de la statique graphique sans passer par les doubles projections de la géométrie descriptive. Les résultats théoriques et les applications pratiques ont été diffusés dans deux ouvrages (Mayor, 1910) (Mayor, 1926). Un résultat fondamental de cette approche s'appuie sur la relation (1) entre la composante F_z d'une force F de l'espace et sa projection f sur le plan (Oxy). Où β est l'angle entre F et le plan Oxy,

$$F_z = f \tan \beta \tag{1}$$

On choisit un point fixe O et une constante *a*. On associe à f une force f' de même intensité que f mais de sens différent dont la ligne d'action est située à la distance δ de O et vérifiant l'équation (2).

$$\delta = a \tan \beta \tag{2}$$

Le résultat fondamental de Mayor montre que l'équilibre des forces f appliquées en un point peut être déterminé par les conditions supplémentaires imposées par l'équilibre des forces f'. Ce résultat fondamental est repris et cité par Richard von Mises (Mises, 1917) pour développer une approche spatiale de la statique graphique fondée sur des approches vectorielles. La relation (2) a permis à Mayor de démontrer un théorème fondamental de correspondance entre les systèmes articulés de l'espace et ceux du plan. Ce théorème met en relation la projection horizontale de la structure avec un système plan articulé dont l'équilibre sous les mêmes forces (au signe près) donne une condition supplémentaire permettant la résolution du problème spatial. La figure 3 donne un exemple de l'application de cette méthode. Une plaque rigide portant un numéro *n* est soumise aux forces f' déduites des forces f appliquées au nœud portant le même numéro en projection horizontale.

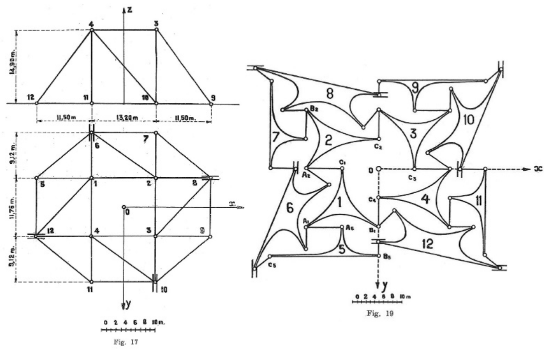

Figure 3. Représentation de la coupole du Reichstag et d'un système articulé plan associé. D'après (Mayor 1926, 60-62).

Cette représentation originale des systèmes de forces traduit une configuration spatiale en un double système de structures planes soumises à des forces de même intensité. Les distances entre O et les lignes d'action des forces du système formé de plaques sont corrélées aux inclinaisons des barres. La mise en œuvre d'une telle méthode est assez fastidieuse et n'a pas connu de postérité marquante hormis les développements de Von Mises (Ciblac, 2018). En revanche, une automatisation des calculs pourrait permettre la visualisation originale des caractéristiques géométriques reliant les forces et les inclinaisons des barres.

3. Objectifs des transpositions numériques de la statique graphique

3.1 Visualisation de la géométrie et des efforts

3.1.1 Visualisation des polygones funiculaires et des polygones des forces

La visualisation graphique des résultats de calcul de structure n'est pas propre à la statique graphique. Les logiciels disponibles proposent divers types de représentation. La statique graphique s'appuie toutefois sur une double représentation spécifique traduisant l'équilibre des systèmes de forces. Une première transposition numérique de la statique graphique peut ainsi consister à représenter le polygone des forces associé à la représentation des efforts dans une structure soumise à des efforts normaux. Un module de construction des polygones des forces peut par exemple être ajouté à un logiciel de calcul ne mobilisant pas initialement la statique graphique. Cette simple visualisation est toutefois limitée par rapport aux potentialités de cette double représentation. En effet, les méthodes de la statique graphique permettent de réaliser les constructions en faisant des hypothèses non seulement sur la géométrie de la structure, mais aussi sur les efforts. Ainsi la forme de la structure peut être déduite des polygones des forces, et donc des efforts que l'on veut imposer. Les liens entre les forces et la forme traduisent des relations de dualité exploitables de diverses manières (voir 3.2). Le pilotage par les efforts n'est pas possible avec les logiciels classiques de calcul de structures pour lesquels la géométrie et les cas de charges sont des données initiales et les efforts sont des résultats de calcul.

3.1.2 Projections des structures spatiales

Dans le cas des structures spatiales, les projections planes, notamment en géométrie descriptive permettent une mise en œuvre des méthodes bidimensionnelles de la statique graphique pour résoudre des problèmes tridimensionnels. L'ingénieur Jurg Conzett mobilise la statique graphique dans ses travaux de conception et attache une importance à l'usage de la géométrie descriptive pour illustrer et mieux comprendre le fonctionnement des structures spatiales (Conzett, 2014). Cette démarche permet aussi des études théoriques comme par exemple celle des coupoles étoilées symétriques. Un résultat remarquable, facilement démontrable par cette méthode, indique que seules les coupoles construite sur la base de polygones réguliers à nombre impair de côtés ne sont pas critiques (Pirard, 1967) p. 367-370. D'autres types de projections peuvent être mobilisés pour concevoir des familles de structures, par exemple les transformations projectives des systèmes de forces en équilibre (Fivet, 2016).

3.2 Choix des paramètres

Les approches classiques de la statique graphique mobilisées dans le cadre du calcul ou de la conception de structure associent les constructions dans le plan de situation et dans le plan des forces où sont construits les polygones des forces. Il est par exemple possible de construire des polygones funiculaires passant par 3 points fixés par exemple pour satisfaire des conditions architecturales, ou imposer des efforts dans barres. Ce lien étroit entre forme et forces est consubstantiel à la dualité de l'approche et permet un libre choix de paramètres de natures différentes. Les approches permettant de gérer conjointement les contraintes morphologiques et mécaniques présentent un intérêt particulier dans les processus de conception architecturale.

3.3 Interactivité graphique

3.3.1 La géométrie dynamique : approche paramétrique

Les logiciels de géométrie dynamique (par exemple Cabri géomètre ou Geogebra) permettent réaliser des constructions géométriques en conservant les relations entre les objets définis de manière paramétrique. Les figures 1 et 2 sont des copies d'écran de telles figures paramétriques où, si l'on modifie les positions des nœuds libres de la structure ou les chargements, les efforts et/ou la géométrie sont simultanément mis à jour. Parallèlement à l'usage de logiciels de géométrie dynamique de telles constructions paramétriques ont été programmées de manière propre comme dans le site Active Statics de Simon Greenwold (https://acg.media.mit.edu/people/simong/statics/data/). Des sites internet pédagogiques dédiés à la statique graphique donnent accès à des figures paramétriques interactives construites en géométrie dynamique et permettant d'explorer des structures dont les topologies sont prédéfinies (Ciblac, 2008) (eQUILIBRIUM, an interactive, graphic statics-based learning platform for structural design, http://block.arch.ethz.ch/equilibrium/).

3.3.2 Développements spécifiques : Conception interactive de structures

La géométrie dynamique peut être utilisée pour réaliser des constructions de statique graphique pendant des phases de conception. Les limitations, notamment topologiques, liées à l'usage des figures paramétriques préconstruites peuvent ainsi être levées. Cependant, comme ce type de logiciel n'intègre que des contraintes géométriques, les constructions de statique graphique doivent être entièrement réalisées par l'utilisateur. Aussi des recherches ont fait l'objet de développements spécifiques de logiciel associant interactivité graphique et construction de statique graphique dans le but d'assister à la conception interactive de structures, par exemple (Fivet, 2013) (Fivet & Zastavni, 2014) (Fivet & Zastavni, 2015).

3.4 Optimisation des structures

Les approches numériques donnent accès à des procédures d'optimisation (algorithmes génétiques par exemple) pouvant être associées à des modèles paramétriques. Ainsi, la statique graphique peut être utilisée pour réaliser les modèles paramétriques donnant la géométrie et les efforts associés et l'optimisation intervenir a posteriori. Une intégration plus profonde de l'optimisation mobilisant la statique graphique est proposée pour déterminer des structures optimales de Michell par (Baker, Beghini, Mazurek, Carrion, & Beghini, 2013) (L. L. Beghini, Carrion, Beghini, Mazurek, & Baker, 2014) (Mazurek, Beghini, Carrion, & Baker, 2016). Le problème consiste à rechercher pour un chargement donné des structures réticulées de volume minimal pour lesquelles chaque barre atteint la contrainte limite admissible (Michell, 1904). En supposant les contraintes limites constantes et égales en traction et compression, ce problème revient à minimiser la somme des produits des longueurs des barres par la valeur absolue des efforts (compression ou traction) qu'elles subissent. La dualité reliant le diagramme des forces au diagramme de forme donne un accès direct à chacun des termes de cette somme de produit.

3.5 Conception de structures planes et spatiales

3.5.1 Structures réticulées

Nous avons vu précédemment des exemples d'approches numériques de conception de structures réticulées planes mobilisant la statique graphique. Nous donnons ici quelques exemples complémentaires de conception de structures spatiales. Certaines peuvent s'appuyer sur une double projection comme par exemple (A. Beghini, Beghini, Schultz, Carrion, & Baker, 2013) qui proposent une utilisation de l'approche 2D du théorème de Rankine comme méthode alternative à la méthode des densités de forces. Des approches convoquant en plus de la statique graphique des grammaires de formes (Lee, Mueller, & Fivet, 2016) ou des variations combinatoires (Ole Ohlbrock & Schwartz, 2016) peuvent aussi être mobilisées.

3.5.2 Maçonneries

Dans le domaine de l'étude des maçonneries, les polygones funiculaires peuvent être mobilisés pour évaluer la stabilité des maçonneries curvilignes. Des applications interactives paramétriques de cas 2D ou pseudo 3D ont été développés par (Block, Ciblac, & Ochsendorf, 2006) dans le cadre de l'analyse limite. Une approche tridimensionnelle de conception de structures maçonnées mobilisant la statique graphique a été développée par (Block & Ochsendorf, 2007) en s'appuyant le concept de réseaux de forces (O'Dwyer, 1999), approche généralisant en 3D la notion polygones funiculaires permettant rechercher des formes purement comprimées sous un chargement vertical. Un réseau de forces peut être assimilé à l'ensemble des efforts dans les mailles d'un filet où des forces verticales sont appliquées aux nœuds, à l'instar des maquettes utilisées par Antoni Gaudi. Dans le logiciel RhinoVault (Rippmann, Lachauer, & Block, 2012) la dualité est mobilisée pour interagir à la fois sur les réseaux de forces et sur les polygones des forces pendant la conception de voutes. La prise en compte de l'évaluation des critères de résistance aux joints des maçonneries et la visualisation des lignes de pression a donné lieu à des développements spécifiques de la méthode des réseaux de forces en 2D par (Ciblac & Morel, 2014) et en 3D (Fantin & Ciblac, 2016) (Fantin, Ciblac, & Brocato, 2018). Ces développements visent à permettre une analyse à la rupture d'édifices patrimoniaux et à une étude plus fine pendant la conception de maçonneries.

4. Conclusion

Les diverses transpositions numériques des théories de la statique graphique ont en commun la forte mobilisation des relations de dualité traduisant le rapport étroit entre la géométrie et les forces en jeu. Cette particularité est largement exploitée dans le cadre d'applications pédagogiques et de conception de structures. Les divers théorèmes mobilisés permettent d'explorer de manière théorique et pratique des familles de structures avec des raisonnements géométriques qui peuvent donner accès à une meilleure compréhension de leur fonctionnement. Les transpositions numériques rendent possibles des approches interactives s'appuyant sur un libre choix de paramètres géométriques et mécaniques et permettent aussi de mobiliser des procédures d'optimisation. L'implémentation de méthodes ou de théorèmes historiquement abandonnées du fait de leur mise en œuvre difficile, ouvrent la voie à de nouvelles applications.

Bibliographie

Akbarzadeh, M., Van Mele, T., & Block, P. (2015). On the equilibrium of funicular polyhedral frames and convex polyhedral force diagrams. Computer-Aided Design, 63, 118‑128.

Baker, W. F., Beghini, L. L., Mazurek, A., Carrion, J., & Beghini, A. (2013). Maxwell's reciprocal diagrams and discrete Michell frames. Structural and Multidisciplinary Optimization, 48(2), 267‑277.

Beghini, A., Beghini, L. L., Schultz, J. A., Carrion, J., & Baker, W. F. (2013). Rankine's Theorem for the design of cable structures. Structural and Multidisciplinary Optimization, 48(5), 877‑892.

Beghini, L. L., Carrion, J., Beghini, A., Mazurek, A., & Baker, W. F. (2014). Structural optimization using graphic statics. Structural and Multidisciplinary Optimization, 49(3), 351‑366.

Block, P., Ciblac, T., & Ochsendorf, J. (2006). Real-time limit analysis of vaulted masonry buildings. Computers & Structures, 84(29), 1841‑1852.

Block, P., Fivet, C., & Van Mele, T. (2016). Reciprocal diagrams: Innovative applications of past theories. International Journal of Space Structures, 31(2‑4), 84‑84.

Block, P., & Ochsendorf, J. (2007). Thrust network analysis: a new methodology for three-dimensional equilibrium. Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures, 48(3), 167–173.

Chatzis, K. (2004). La réception de la statique graphique en France durant le dernier tiers du XIXe siècle. Revue d'histoire des mathématiques, 10(1), 7‑43.

Ciblac, T. (2008). Structure Computation Tools in Architectural Design. In M. Muyle (Éd.), Architecture « in computro » - Integrating Methods and Techniques: 26th eCAADe Conference Proceedings (p. 275‑282). Antwerpen, Belgium.

Ciblac, T. (2018). The graphic statics of the systems of space by Benjamin Mayor. In I. Wouters, S. Van de Vorde, I. Bertels, B. Espion, K. de Jonge, & D. Zastavni (Éd.), Building Knowledge, Constructing Histories. Proceedings of the Sixth International Congress on Construction History (p. 465‑473). Brussels.

Ciblac, T., & Morel, J.-C. (2014). Maçonneries durables. Comportement mécanique et modélisation des structures (Hermès Lavoisier). Paris.

Conzett, J. (2014). Projektionen räumlicher Kräftesysteme. Stahlbau, 83(11), 815‑825.

Cremona, L. (1872). Le figure reciproche nella statica grafica. Milan: G. Bernardoni.

Culmann, K. (1866). Die graphische Statik. Zürick: Meyer & Zeller.

Fantin, M., & Ciblac, T. (2016). Extension of thrust network analysis with joints consideration and new equilibrium states. International Journal of Space Structures, 31(2‑4), 190‑202.

Fantin, M., Ciblac, T., & Brocato, M. (2018). Resistance of flat vaults taking their stereotomy into account. Journal of Mechanics of Materials and Structures, 13(5), 657‑677.

Fivet, C. (2013). Constraint-based graphic statics (PhD Thesis, UCL - Université Catholique de Louvain).

Fivet, C. (2016). Projective transformations of structural equilibrium. International Journal of Space Structures, 31(2‑4), 135‑146.

Fivet, C., & Zastavni, D. (2015). A fully geometric approach for interactive constraint-based structural equilibrium design. Computer-Aided Design, 61, 42‑57.

Föppl, A. (1892). Das Fachwerk im Raum. Leipzig.

Lee, J., Mueller, C., & Fivet, C. (2016). Automatic generation of diverse equilibrium structures through shape grammars and graphic statics. International Journal of Space Structures, 31(2‑4), 147‑164.

Lévy, M. (1886). *La statique graphique et ses applications aux constructions.* Paris: Librairie Gauthier-Villard.

Maxwell, J. C. (1864). XLV. On reciprocal figures and diagrams of forces. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 27(182), 250‑261.

Mayor, B. (1910). Statique graphique des systèmes de l'espace (Lausanne: F. Rouge et Cie. Paris: Librairie Gauthier-Villard.).

Mayor, B. (1926). Introduction à la statique graphique des systèmes de l'espace. (Librairie Payot et Cie.). Lausanne.

Mazurek, A., Beghini, A., Carrion, J., & Baker, W. F. (2016). Minimum weight layouts of spanning structures obtained using graphic statics. International Journal of Space Structures, 31(2‑4), 112‑120.

Michell, A. G. M. (1904). LVIII. The limits of economy of material in frame-structures. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 8(47), 589‑597.

Mises, R. von. (1917). Graphische Statik räumlicher Kräftesysteme. Zeitschrift für Mathematik und Physik, (64), 209‑232.

O'Dwyer, D. (1999). Funicular analysis of masonry vaults. Computers & Structures, 73(1‑5), 187‑197.

Ole Ohlbrock, P., & Schwartz, J. (2016). Combinatorial equilibrium modeling. International Journal of Space Structures, 31(2‑4), 177‑189.

Pirard, A. (1967). La statique graphique.

Poleni, G. (1748). Memorie istoriche della gran cupola del tempio vaticano.

Rankine, W. J. M. (1858). A manual of applied mechanics.

Rankine, W. J. M. (1864). XVII. Principle of the equilibrium of polyhedral frames. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 27(180), 92‑92.

Rippmann, M., Lachauer, L., & Block, P. (2012). Interactive Vault Design. International Journal of Space Structures, 27(4), 219‑230.

Tournès, D. (2000). Pour une histoire du calcul graphique. Revue d'histoire des mathématiques, 6(1), 127‑161.

Tournès, D. (2003). 622 ouvrages de calcul graphique 1790-1990. IUFM de la Réunion et REHSEIS-CNRS ACI « Histoire des savoirs ».

Varignon, P. (1725). Nouvelle mécanique, ou Statique, dont le projet fut donné en 1687, ouvrage posthume (Jombert). Paris.

Zalewski, W., & Allen, E. (1998). Shaping Structures : Statics. New York: John Wiley and Sons.

Zalewski, W., & Allen, E. (2009). Form and Forces: Designing Efficient, Expressive Structures.