Autour des polynômes d'Al-Qatrawānī

Around the polynomials of Al-Qatrawānī

Moslih *Ahmed*[1]
Université Ibn Tofail Kénitra, Maroc

Résumé. Cet article fait partie d'un travail qui met l'accent sur le problème des polynômes chez les mathématiciens arabes pendant le Moyen Âge. Nous nous y intéressons à un des meilleurs mathématiciens de l'occident musulman pendant le 15e siècle. Il s'agit d'Al-Qatrawani. Nous y parlrons principalement de son livre intitulé *Rashfat ar-ruḍāb min thughūr acmāl al-ḥisāb* "dans lequel l'auteur présente un chapitre distingué et original traitant le problème des polynômes. Nous y montrons que la manière avec laquelle ce dernier aborde la question évoquée est différente de l'école orientale, représentée par le livre al-Badic fī l-ḥisāb d'al-Karajī et al-bāhir fī l-jabr wa l-muqābala d'as-Samaw'al, essentiellement lorsqu'on utilise son approche et son texte sur l'extraction de la racine cubique d'un polynôme. Dans ce contexte, nous signalons que l'originalité et la richesse du livre d'al- Qatrawānī *Rashfat ar-ruāb* s'appuie, à notre avis, sur l'absence des idées mathématiques (polynômes) chez les mathématiciens maghrébins. Cette référence paraît également très développée par rapport aux innovations de l'école de l'Orient.

Abstract. This article is part of a study that focuses on the issue of polynomials in Arab mathematicians during the Middle Ages. Specifically, it delves into one of the most prominent mathematicians of the Muslim West during the 15th century, Al-Qatrawani. The main focus is on his book titled "Rashfat ar-ruḍāb min thughūr acmāl al-ḥisāb," in which the author presents a distinct and original chapter addressing the problem of polynomials. The article highlights that Al-Qatrawani's approach to this issue differs from the oriental school, represented by books like "al-Badic fī l-ḥisāb" by al-Karajī and "al-bāhir fī l-jabr wa l-muqābala" by as-Samaw'al. This is particularly evident in his treatment of extracting the cubic root of a polynomial. The uniqueness and richness of Al-Qatrawānī's book "Rashfat ar-ruāb" lie in its departure from the mathematical ideas (polynomials) prevalent among Maghrebian mathematicians. Additionally, it appears to be highly developed compared to the innovations of the Oriental school.

Mots-clefs : polynôme, algèbre, racine, carré, cube.

[1] - Professeur de philosophie et histoire des sciences.

Introduction :

Au 12ème colloque maghrébin à Marrakech (Mai 2016)[2], nous avons présenté quelques idées mathématiques concernant les algorithmes, qui donnent une importance historique et scientifique au livre *Rashfat ar-ruḍāb min thughūr acmāl al-ḥisāb*[3] d'al-Qatrawānī[4]. Dans le présent article, nous envisageons de traiter le sujet des polynômes, et ce, en mettant l'accent sur l'originalité et la singularité de ce livre dans la tradition mathématique maghrébine[5].

Nous y rappelons, dans cet article, quelques propriétés qui ont concerné les polynômes comme une suite ordonnée de coefficients ou des expressions algébriques sous forme de : $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \ldots + a_nx^n$, nous nous intéresserons au problème de l'extraction de la racine carrée d'un polynôme carré parfait tel qu'il a été étudié par le mathématicien maghrébin al-Qatrawānī. Ce dernier a exposé le traitement des polynômes avec des opérations arithmétiques comme l'addition, la multiplication par translation ou semi-translation, la soustraction et la division. Il a également mobilisé la voie algébrique inaugurée par al-Khwārizmī et a utilisé des données algébriques et arithmétiques pour résoudre le problème des polynômes. Donc, on peut

---

[2] - En 2016, j'ai participé à un colloque international sur l'histoire des mathématiques arabes, où j'ai découvert l'originalité et la singularité, dans la tradition mathématique maghrébine, du livre *Rashfat ar-ruḍāb min thughūr acmāl al-ḥisāb* d'al-Qatrawānī.

Moslih Ahmed. (2018). *Algorithme et Optimisation chez al-Qatrawānī*. In Actes du XIIè Colloque maghrébin sur l'Histoire des Mathématiques Arabes, 26-28 mai 2016, Editeur école Normale Supérieure, Marrakech, Maroc, pp. 186 - 207.

[3] - Nous connaissons jusqu'à aujourd'hui une seule copie complète qui se trouve à la bibliothèque nationale (BN) de Rabat sous le numéro Q416. Aussi nous signalons qu'il existe deux fragments de cet ouvrage à Tunis sous le numéro 7803 et 19620/2, et on ajoute à cette liste la dernière découverte de Mahdi Abdeljouad et Hamida Hedfi de sept feuilles (17b – 23b) du manuscrit 13053/6 qui se trouve au Fond Ahmadi à Tunis.

Mahdi Abdeljouad et Hamida Hedfi.(2018). *Manuscrits scientifiques du fonds Ahmadi* (*Mathématiques-Astronomie – Astrologie*). Bibliothèque Nationale de Tunis. P42.

[4] - Selon notre connaissance, les données bibliographiques sur la vie et la formation scientifique d'al-Qatrawānī sont quasiment inexistantes. Cependant, d'après quelques exemples cités dans son livre Rashfat ar-ruḍāb min thughūr acmāl al-ḥisāb", il est d'origine égyptienne et il a séjourné à Tunis. Chose qui indique qu'il a eu une connaissance des travaux algébriques de l'école orientale, représentée

principalement par al-Karajī et son élève as-Samaw'al al-Maghribī. Selon le manuscrit du "Rashfat ar-ruḍāb" et les fragments que nous connaissons jusqu'à présent, notre mathématicien Ahmad ibn Muhammadal-Qatrawānī a vécu entre le XIVe et le XVe siècle. Il a quitté son pays pour aller enseigner à Tunis.
al-Qatrawānī. *Rashfat ar-ruḍāb min thughūr acmāl al-ḥisāb* [*La succion du nectar des bouches des opérations du calcul*], Manuscrit de la bibliothèque nationale(BN), Rabat, Q416. Manuscrit de Tunis, 7803 et 19620/2. Manuscrit de Fond Ahmadi 13053/6.

[5] - Jusqu'à aujourd'hui, nous ne connaissons nul mathématicien Maghrébin (ni Ibn al-Banna ni ses commentateurs) qui eut traité ou étudié le problème des polynômes comme une expression algébrique ou suite ordonnée, comme suit : $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$.

dire que la base de tout travail algébrique médiéval des mathématiques arabes repose sur l'algèbre d'al-Khwārizmī[6].

Nous portons notre attention sur les polynômes chez al-Qatrawānī, chapitre pratiquement méconnu[7] qui a d'une part une valeur importante, et dont l'originalité touche à la tradition mathématique maghrébine, et d'autre part à la circulation des idées mathématiques entre l'Orient et l'Occident musulmans entre le XIème et le XVème siècle. Pour comprendre, comment al-Qatrawānī est parvenu à étudier les polynômes et les traiter avec une démonstration algébrique, il faut rappeler le travail sur les polynômes d'al-Karajī (m.1029) et son école orientale représentée par as-Samaw'al (m. 1175)[8] dans son livre al-bāhir fī l-jabr [livre flamboyant en algèbre .[9]]

[6] - Le livre d'al-Khwārizmī (vers 780-vers 850) intitulé kitāb al-Jabr wa l-muqābala, constitue la base de tous les travaux algébriques qui viendront après lui, il fournit un bon exposé de façon systématique des six équations canoniques de degré inférieur ou égale à 2 et l'énoncé des règles générales permettant l'obtention de solutions en fonction des coefficients pour chaque cas. Les six équations ou la formulation d'al-Khwārizmī fait intervenir une quantitée(inconnue), le bien et sa racine, on citons : 1- Des carrés (des biens) égaux à des racines: $ax^2 = bx$; 2- Des carrés (des biens) égaux à un nombre: $ax^2 = b$; 3- Des racines égales à un nombre: $bx = c$; 4- Des biens et des racines égaux à des nombres: $ax^2 + bx = c$; 5- Des carrés (des biens) et un nombre égaux à des racines: $ax^2 + c = bx$; 6- Des carrés(des biens) égaux à des racines et un nombre : $ax^2 = bx + c$.
Rashed, R.(2007). *AL-khwārizmī le commencement de l'algèbre*. Paris, Éditions Albert Blanchard.
Djebbar A.(2013). *Al- Khwārizmī l'algèbre et le calcul indien*. Paris. Les éditions du Kangourou.
Djebbar Ahmed.(2001*). Une histoire de la science Arabe*. Entretien avec Jean Rosmorduc. Édition Seuil, pp. 222-225.

[7] - Les quelques écritures publiées dans le domaine des polynômes ont essayé de montrer l'importance de ce volet dans l'histoire des mathématiques arabes. Toutefois, ces études ont émis le vœu et le besoin d'une étude comparative et analytique pour montrer l'importance de ce chapitre et, à travers elle, comprendre la circulation des idées mathématiques dans les pays d'islam, comme a dit le chercheur Djebbar que l'éxtraction de la racine carrée d'un polynôme à coefficients entiers ou rationnels positifs apparaît, pour la première fois, dans le livre al-Badiᶜ fī l-ḥisāb d'al-Karajī et a été étendue par as-Samaw'al dans son livre al-bāhir. Il témoigne qu'il l'a trouvé pour la première fois dans un écrit occidentale, mais l'intérêt de ce travail des polynômes réside dans ce qu'il pourrait signifier sur le plan de la circulation des idées entre les différents foyers scientifiques de l'empire musulman.

Djebbar, A. (2005). *L'algèbre Arabe genèse d'un art*, Vuibert, édit Adapt, paris, pp.99-100.

[8] - On va voir dans un deuxième article si l'approche d'as-Samaw'al qui constitue, avec le travail d'al-Karajī, les fondements d'une méthode générale d'extraction de la racine carrée d'un polynôme à coefficients entiers, est présente chez al-Qatrawānī un mathématicien de l'occident musulman, et précisément est ce qu'il y a un impact de l'école orientale (al-Karajī et as-Samaw'al) sur le traitement des polynômes chez al-Qatrawānī? Puisque ce dernier présente un travail algébrique original par rapport aux mathématiciens maghrébins? Mais on s'intéressera dans ce premier article au problème de l'extraction de la racine carrée et cubique d'un polynôme tel qu'il a été étudié et traité par notre mathématicien al-Qatrawānī, qui présente un chapitre original

1 - Traitement des polynômes[10] chez al-Qatrawānī :

Je me suis tourné vers le début du XI^ème^ siècle pour combler une lacune qui va me permette de comprendre la circulation des idées mathématiques entre l'Orient et l'Occident musulman d'une part, et pour comprendre, d'autre part, pourquoi al-Qatrawānī est le seul mathématicien Maghrébin qui a étudié le problème de polynômes tel que nous connaissions jusqu'à présent.

Avant l'étude des polynômes, al-Qatrawānī présente une analyse systématique des termes et des exposants algébriques, en mobilisant l'héritage algébrique inauguré par Abū Kāmil, al-Karajī et as-Samaw'al sans se référer à eux. Au début de ce chapitre consacré aux polynômes, il commence par rappeler la signification des termes algébriques avant de déterminer les exposants, c'est-à-dire: le nombre (entiers rationnels positif : العدد; $a \in \mathbb{N}$), l'inconnu (الجذر : le racine $\sqrt{a}$), le carré (المال a^2) et le cube (الكعب a^3). C'est la base de toutes les puissances de l'inconnu ou des exposants algébriques, comme il a dit: « Les quatre fondements de ces espèces (de l'algébre) sont: Le nombre, les choses et on nomme les racines, les carrés et les cubes et tout revient à eux »[11].

---

par rapport à l'école Maghrébine (Ibn al-Bannā et ses commentateurs) et un travail plus profond par rapport à l'école orientale.

[9] - Le livre al-bāhir d'as-Samaw'al est un traité d'algèbre qui présente une idée plus précise de l'état de l'algèbre au 12^e^ siècle. L'auteur a divisé son livre en quatre parties, dans la première on trouve une étude des inconnues avec des opérations arithmétiques (produit, division, extraction des racines carrées). Dans la deuxième il a traité des inconnues qu'il a présentées dans des équations du deuxième degré et des sommes finies de nombre. Dans la troisième, il a traité les quantités rationnelles et irrationnelles. Dans la quatrième, il a présenté un classement des problèmes mathématiques.

Salah Ahmad et Roshdi Rashed. (1972). *Al-bāhir en algèbre d'as-Samaw'al*. Université de Damas.

[10] - Les historiens Djebbar, Lamrabet et d'autres, ont déclaré que le premier à avoir exposé et développé une théorie des polynômes fût al-Karajī (vers 1020) et son école, représentée principalement par as-Samaw'al al-Maghribī. À propos de cette déclaration, nous signalons au début que la structure des polynômes et le travail algorithmique d'al-Qatrawānī, suivant le contenu du *Rashfat ar-ruḍāb min thughūr a^c^māl al- ḥisāb*, sont semblables à celui de ces deux prédécesseurs (al-Karajī et as-Samaw'al), surtout si on se base sur l'extraction de la racine carrée d'un polynôme.

Djebbar A(1988). Q*uelques aspects de l'algèbre dans la tradition mathématique arabe de l'Occident musulman*. Premier Colloque maghrébin d'Alger sur l'Histoire des Mathématiques Arabes, 1-3 décembre 1986, dans les Actes du Colloque, Alger, Maison du Livre, p 119..

Djebbar, A. (2005). *L'algèbre Arabe genèse* d'un *art*, op.Cit., p 99.

Lamrabet Driss. (2014). *Introduction à l'histoire des mathématiques Maghrébine*. Édition print book , France, 2^éme^ Edition revue et augmentée, p 356.

[11] - " وأنواعه أصولها أربعة: العدد والأشياء وتسمى الجذر، وأيضا الأموال والكعوب، وما عداها إليها ترجع".

D’après la définition de ces termes algébriques, al-Qatrawānī calcule, en langue naturelle sans symbolisme, les puissances selon un ordre de croissances, ce qu’ il a montré par des exemples des différents exposants algébriques d’une manière générale, c’est-à-dire qu’il a donné des techniques algébriques qui lui ont permis de présenter une étude des puissances du connu ou de l’inconnu pour trouver le nom correspondant à l'exposant, ceci paraît très bien, chez al-Qatrawānī, dans une série de relations après avoir défini la puissance nulle, telle que :

$x^0 = 1$; $x \, . \, x = x^{1+1} = x^2$; $x . x^2 = x^{1+2} = x^3$ ... et ainsi de suite. Donc on peut exprimer ces règles par la formule suivante:

$$x^n . x^m = x^{n+m} \text{ avec n et m deux entiers positifs.}$$

Dans cette partie, al-Qatrawānī rappelle quelques propriétés qui concernent le calcul des puissances. Il s’agit de connaître l’espèce d’un exposant algébrique et introduire quelques changements liés aux techniques du calcul. Il énonce une règle générale qui s’appuie sur la technique de la division et de la multiplication, pour déterminer les différentes puissances de l’inconnue, et arrive selon sa règle à la douzième puissance (x^{12}) que l’on ne trouve ni chez al-Karajī ni chez as-Samaw’al qui se sont exprimés sur l’espèce d’exposant, de la neuvième puissance (x^9) . En ce sens, al-Qatrawānī suit un procédé arithmétique qui facilite le calcul des puissances pour trouver le nom de l’espèce d’exposants ; alors pour connaitre l’espèce de $x^n \; avec \; n \; > 3$, il faut appliquer les deux conditions suivantes[12]:

$\mathcal{A} -$ Si *n* est un nombre impair, on le divise par 3, le nombre de résultat et l’espèce d’exposant si 0 est le reste de la division, s’il reste 2 c’est le puissance du carré, mais s’il reste 1 on l’ajoute au diviseur, on obtient 4 c’est le puissance du carré – carré, exemple: on cherche l’espèce de puissance de 9 ? Premièrement, 9 est un nombre impair vérifier la première condition, donc 9 diviser par 3 est 3, ce dernier est le nombre de répétition de cube et on le nomme cubo – cubo - cube.

$\mathcal{B}$ – Si *n* est un nombre pair, il admet la division sur 2 ou sur 3, le résultat de la division est le nombre de la répétition de puissance, soit la répétition par le carré ou par le cube ; exemple: on cherche le genre de puissance de 10 ? 10 est un nombre pair qui vérifie la deuxième condition, donc 10 divisé par 2 est 5, ce dernier est le nombre de répétition de carré et on le nomme carré – carré – carré – carré – carré. Mais si on le divise par 3 on obtient 3comme résultat et 1 le reste, puis on ajoute 1 au 3 pour obtenir 4 qui est le carré – carré et 2 le nombre de répétition cubo –cube.

D’après ces deux conditions nécessaires et les exemples qu’il a utilisés, on peut présenter le travail d’al-Qatrawānī, sur les exposants algébriques, dans le tableau suivant:

Puissance	Espèce	النوع
Pas de puissance ; x^0	Nombre	عدد
x	Chose, Racine	شيء، جذر،

Al- Qatrawānī. *Rashfat ar-ruḍāb min thughūr aᶜmāl al- ḥisāb*. MS de la bibliothèque nationale de Rabat, Q 416, p118.

12 - Ibid., p119.

$x^2 = x.x$	Carré	مال، مجذور، مربع
$x^3 = x^2.x$	Cube	كعب
$x^4 = x^2.x^2$	Carré – carré	مال مال
$x^5 = x^{3+2} = x^3.x^2$	Quadrato – cube	مال كعب
$x^6 = x^{4+2} = x^4.x^2$ $x^6 = x^{2+2+2} = x^2.x^2.x^2$	Cubo – cube Carré – carré – carré	كعب كعب: مال مال مال
$x^7 = x^{3+3+1} = x^3.x^3.x$	Quadrato – quadrato – cube	مال مال كعب
$x^8 = x^{6+2} = x^6.x^2$	Quadrato-cubo- cube	مال كعب كعب
$x^9 = x^{3+3+3} = x^3.x^3.x^3$	Cubo – cubo – cube	كعب كعب كعب
$x^{10} = x^{3+3+2+2} = x^3.x^3.x^2.x^2$ $x^{10} = x^{3+3+3+1}.x^3.x^3.x^3.x$	Quadrato – quadroto- cubo – cube	مال مال كعب كعب
$x^{11} = x^{3+3+3+2} = x^3.x^3.x^3.x^2$	Quadrato- cubo – cubo- cube	مال كعب كعب كعب
$x^{12} = x^{3+3+3+3} = x^3.x^3.x^3.x^3$ $x^{12} = x^{2+2+2+3+3} = x^2.x^2.x^2.x^3.x^3$	Cubo – cubo- cubo – cube Quadrato – quadrato- Quadrato – cubo – cube	- كعب كعب كعب كعب - مال مال مال كعب كعب:

Tableau 1

Selon ce procédé, al-Qatrawānī présente une réflexion sur les outils de l'algèbre, comme une entrée pour faciliter l'accès au traitement des polynômes. Dans le livre Rashfat ar-ruḍāb, on découvre une véritable méthode d'étudier les polynômes originaux par rapport à la tradition mathématique maghrébine[13]. L'auteur a exposé son

[13] - L'historien Ahmed Djebbar a déclaré que le livre *Rashfat ar-ruḍāb* d'al-Qatrawānī contient pour la première fois dans un écrit Maghrébin, le calcul de la racine carrée et de la racine cubique d'un polynôme, ce qui montre la singularité et l'originalité de ce livre.

Djebbar A. (1988). *Quelques aspects de l'algèbre dans la tradition mathématique arabe de l'Occident musulman*. Op. Cit., p 118.

étude à l'aide des opérations arithmétiques de l'addition, la multiplication par semi translation ou tiers translation[14], la soustraction et la division, donc il utilise le procédé arithmétique pour résoudre les polynômes et les expressions algébriques.

Nous allons d'abord présenter la formulation que fournit al-Qatrawānī, avec des exemples appliqués pour chacun de ces procédés.

2 – Le degré d'un polynôme.

Entre la page 120 et 123 du Rashfat ar-ruḍāb, al-Qatrawānī s'intéresse au problème de l'extraction du degré d'un polynôme avant de chercher la racine carrée d'un polynôme carré parfait ou la racine cubique d'un polynôme cube parfait. Il présente plusieurs algorithmes avec des exemples pour obtenir le degré à partir de la multiplication d'un polynôme par lui-même ; cette opération utilise la même démarche que la multiplication d'un nombre connu, mais l'exposant de cette opération est l'addition de l'exposant du multiplicande par celui du multiplicateur, on trouve la règle équivalente à:

$$a_0 x \times a_1 x^2 \times \dots a_{n-1} x^n = (a_0 \times a_1 \times \dots \times a_{n-1}) x^{1+2+\cdots+n}$$

Par exemple, multiplier trois carrés par deux carrés : $3x^2 \times 2x^2$. Pour cette espèce, on additionne l'exposant du multiplicande et celui de multiplicateur, ce qui en résulte sera l'exposant du produit, selon l'exemple d'al-Qatrawānī, est six carré-carrés ($3x^2 \times 2x^2 = (3 \times 2)x^{2+2} = 6x^4$), suivant le degré de l'exposant, et ainsi de suite. Il donne une règle pour l'extraction d'un carré. Il dit :

« Pour extraire une racine carrée, tu poses les monômes sur une ligne, en séparant ses ordres par des signes représentés par des points [comme on a vu pour un nombre connu]. Tu traces une ligne au-dessus et tu multiplies le premier monôme par lui-même et tu écris le produit au-dessous, puis tu le doubles et tu l'inscris sous le signe placé avant lui ; puis multiplie le monôme qui suit par le double et inscris le produit au-dessus de la ligne. Ainsi tu doubles ce monôme et tu écris le produit au-dessous sous le signe qui suit. Après tu multiplies le troisième monôme par le double et tu mets le produit au-dessus du double […] ; Après tu multiplies le dernier monôme par le deuxième double, le produit tu l'inscris au-dessus de la ligne, puis tu doubles ce monôme et tu écris le produit au- dessus de ligne comme il a été indiqué […]. S'il en manque un monôme, mets zéro à sa place... »[15].

Nous remarquons que la règle précédente est utilisée dans sa démarche analytique d'une part, la règle de la multiplication avec semi-translation et la multiplication par tiers translation, d'autre part cette règle est analogue à la démarche

---

[14] - D'après al-Qatrawānī le procédé de la multiplication avec semi translation était réservé au calcul du carrée d'un nombre qu'on le multiple par lui-même et qui est basé sur la formule suivante :

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 = a_1^2 + (2a_1a_2 + a_2^2) + \cdots + (2a_1a_n + 2a_2a_n + \cdots + 2a_{n-1}a_na_n^2)$$

Et pour la multiplication avec tiers translation était réservé au calcul du cube d'un nombre qui est basé sur la formule suivante : $x = \sum_1^n a_i \, 10_i$

al-Qatrawānī. *Rashfat ar-ruḍāb min thughūr a^cmāl al-ḥisāb*. Op., cit, pp. 21-22.

[15] - Ibid., p 121.

arithmétique de celle d'as-Samaw'al sans utiliser la technique des tableaux. L'auteur présente sa règle grâce à l'exemple suivant :

Multiplies quatre plus huit choses plus deux carrées par eux même. Nous remarquons d'après d'al-Qatrawānī que le carré-carré (مم désigne x^4), le carré-cube (كمـdésigne x^5), le cube-cube (كك désigne x^6) et ainsi de suite.

Suivant la règle précédente et pour obtenir le degré de polynôme, on dispose l'exemple comme suit: multiplier $\overset{\text{م}}{2}\ \overset{\text{ش}}{8}\ 4$ par lui-même, qu'on peut écrire sous forme de $(2x^2 + 8x + 4) \times (2x^2 + 8x + 4) = (2x^2 + 8x + 4)^2$; On commence à mettre le produit $2 \times 2 = 2^2 = 4$ au-dessus de la ligne et autre 4 au-dessous de signe qui se trouve entre 8 et 2 ; puis on prend $8 \times 4 = 32$ en inscrivant le produit sur le signe qui précède 4 et on écrit le produit $8 \times 8 = 64$ au-dessus de 8, après $8 \times 2 = 16$ inscris sous le signe qui sépare 8 et 4. Ensuite on inscrit 16 sur 64, après$4 \times 16 = 64$, on met le produit sur le signe qui sépare 4 et 8 ; puis on met $4^2 = 16$ au-dessus de 4. Ainsi pour le carré de son exposant on double le premier exposant, après on ajoute 1 pour obtenir l'exposant de la deuxième et un autre 1 pour le troisième exposant, ainsi de suite on obtient le résultat mentionné par al- Qatrawānī $\overset{\text{مم}}{4}\ \overset{\text{ك}}{32}\ \overset{\text{م}}{80}\ \overset{\text{ش}}{64}\ 16$. Qu'on peut écrire en notation moderne par $4x^4 + 32x^3 + 80x^2 + 64x + 16$.

Nous sommes devant un polynôme de degré $4 : a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, qui résume un long procédé algorithmique, qui diffère de celui d'al-Karajī et de celui d'as-Samaw'al, surtout, qu'on va parler, en terme d'extraction de la racine carrée et la racine cubique d'un polynôme tel qu'il a été étudié par le mathématicien maghrébin al-Qaṭrawānī (entre la fin du XIVe et du XVe siècles) dans sa Rashfat al-ruḍāb. Dans ce chapitre algébrique, il expose une véritable théorie des polynômes qui applique une méthode générale avec des procédés algorithmiques qui n'existent pas chez les mathématiciens Maghrébins et qui sont un peu différents, suivant sa méthode de présentation et d'analyse, à la démarche orientale.

3 – L'extraction de la racine carrée d'un polynôme carré parfait

Nous notons bien comment al- Qatrawānī exprime les paramètres mathématiques par des noms et des termes de la langue naturelle. Il emploie, dans ce sens, le terme « espèce » (naw') pour désigner un polynôme dont on ne peut pas extraire sa racine carrée d'un polynôme carré parfait sans deux conditions nécessaires. Il dit :

« Pour qu'un polynôme soit un carré parfait, il faut qu'il y ait deux conditions : La première est que les exposants de x relatifs aux termes extrêmes soient divisibles par 2. La deuxième est que chaque coefficient extrême soient rationnels.»[16].

Pour qu'un polynôme soit carré parfait, ces deux conditions formulent la base d'une règle d'extraction d'un carré. A lui d'ajouter :

« Pour extraire une racine carrée, inscris les monômes dans l'ordre [décroissant des degrés]. S'il manque un monôme, mets zéro à sa place. Puis dispose des points sous les ordres rationnels et trace une ligne sous ces points. Ensuite, recherche un nombre à placer sous le dernier monôme, nombre dont le carré doit

[16] - Ibid., p123.

épuiser ce qui est au-dessus. Double ce nombre et déplace le sous l'ordre irrationnel précédent. Ensuite, place sous l'ordre rationnel précédent un nombre dont le produit par le doublé épuise ce qui est au-dessus. S'il subsiste un reste, il n'y a pas de racine carrée. [Sinon] Soustrais le résultat de ce qui est au-dessus et inscris à sa place le reste. Puis double-le et dispose-le sous la ligne, en regard de l'ordre irrationnel. Déplace ensuite le premier doublé d'un ordre. Puis dispose sous l'ordre rationnel voisin un nombre dont tu opères comme précédemment. Tu double et tu inscris jusqu'à le dernier monôme, d'où le nombre obtenu sur la ligne est la racine…» [17].

La règle précédente est tout à fait générale et s'applique à un polynôme de degré quelconque, dont al-Qatrawānī simplifie cette règle à l'aide de l'exemple suivant :

كـكـ	مـكـ	م	مم	كـ	م	ش	64
81	72		106	184	89	80	

qu'il écrit ainsi:

$$81x^6 + 72x^5 + 106x^4 + 184x^3 + 89x^2 + 80x + 64$$

Est un polynôme de degré 6 : $a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, admet comme racine carrée la formule suivante $b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$, il dit:

« Par exemple, si tu veux la racine carrée de 64 nombres, 80 racines, 89 carrés, 184 cubes, 106 carrés-carré, 72 cubes-carrés et 81 cubo-cubes, dispose ceci comme suit :

ككـ	كمـ	ممـ	كـ	مـ	شـ	64
81	72	106	184	89	80	

Nous remarquons que l'exemple précédent applique les deux conditions citées par al-Qatrawānī, dont on dispose, comme il a dit[18], sous le dernier rationnel 9; son carré 81 épuise ce qui est au-dessus. Puis on écrit le double de 9, soit 18, sous 72, en bas de la ligne. Ensuite on dispose sous le rationnel qui suit 72 un nombre dont le produit par 18 épuise 72; on trouve 4. Multiplie-le par 18, on obtient 72 ce qui épuise le 72 du dessus ; puis par lui-même, il vient 16 tu soustrais de 106; il reste 90 qu'on met à la place de 106. Doublant ensuite 4 pour obtenir 8 que tu disposes sous l'ordre qui suit 90. Ensuite tu écris sous l'ordre rationnel qui suit un nombre dont le produit par le premier doublé épuise ce qui est au-dessus; puis multipliant-le par le second et par lui-même et soustrais chaque fois le résultat de ce qui est au-dessus, tu trouves 5 Multipliant-le par 18, le résultat 90 épuise ce qui est au-dessus; puis par 8 et soustrais le résultat 40 de ce qui est au-dessus; il reste 144; enfin, multiplies-le par lui-même et retranches le résultat de ce qui est au-dessus; il reste 64. Double ce 5 et déplace-le d'un ordre vers la droite. Après tu cherches un nombre à placer sous 64 et dont le produit par tous les doublés et par lui-même épuise ce qui est au-dessus. tu trouves 8 et l'opération est terminée... La racine carrée cherchée est 8 nombres, 5 racines, 4 carrés et 9 cubes, ce qui s'écrit

كـ	مـ	شـ	8
9	4	5	

"[19], ce résultat s'exprime en langue moderne par: $9x^3 + 4x^2 + 5x + 8$.

D'après ce procédé algorithmique, al-Qaṭrawānī a commencé à déterminer les coefficients en allant de plus haut degré (extrême) jusqu'au terme constant (le nombre) pour extraire la racine carrée d'un polynôme carré parfait, dont il a trouvé que la

[17] - Ibid., p 124.

[18] - Ibid., 125.

[19] - Ibid., pp. 125- 126.

racine carrée d'un polynôme du sixième degré (P_x) est un polynôme de troisième degré (f_x), on peut l'exprimer par la formule suivante:

$P_x = a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ et $f_x = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$

Nous notons bien qu'al-Qaṭrawānī s'intéresse, dès le début, à la détermination des coefficients, puisque (f_x) est la racine carrée de (P_x), il faut déterminer les coefficients (b_3, b_2, b_1, b_0) de(f_x) à partir des coefficients $(a_6, a_5, a_4, a_3, a_2, a_1, a_0)$ de (P_x). Suivant une notation moderne, on exprime, en quatre étapes, la démarche algorithmique qui a été introduite dans le texte mentionné ci-dessus, à travers lequel nous montrons son procédé algorithmique.

Première étape : suivant les deux conditions précédentes et la règle générale des polynômes nous remarquons que $a_6 = (b_3)^2$ avec $a_6 - (b_3)^2 = 0$, c'est-à-dire nous cherchons un nombre qu'on multiple par lui–même et qu'on retranche du premier coefficient 81, il ne reste rien. Il trouve $\sqrt{a_6} = b_3;\ a_6 = (b_3)^2\ donc\ b_3 = 9$

Deuxième étape: On écrit le double de b_3 sous $a_5 = 72$ en bas de la ligne (case des x^5) , comme il a dit, puis on dispose sous le rationnel qui suit a_5 un nombre dont le produit par $2b_3 = 18$ épuise a_5; on trouve que $a_5 = 2b_3b_2$ donc $b_2 = 4$, on multiple par lui et on le place sous l'ordre rationnel 106 (case des x^4).

Troisième étape: nous trouvons après des techniques de calcul que $a_4 - (b_2)^2 = 2b_3b_1; d'o$ù $2b_3b_1 = 106 - 16 = 90$ on met dans la case des x^4 au lieu de $a_4 = 106$.

Quatrième étape: nous cherchons le nombre b_1 qui applique la relation $a_3b_1 = 2b_3b_1$ et qui va épuiser 90 qui est sous la case x^4 , nous trouvons $b_1 = 5$ qui conduit à une combinaison des coefficients (b_1, b_2, b_3, b_0) et qui peut épuiser la somme des derniers coefficients $(a_1 + a_0 = 144)$ du polynôme $P_{(x)}$. Continuant ainsi de chercher le dernier terme b_0 de $f_{(x)}$, on trouve que $2b_0b_3 = a_1 + a_0$ et $a_0 = 2b_0b_2$. Donc d'après l'utilisation de la division des termes connues, nous obtenons le dernier terme qui est $b_0 = 8$.

Le tableau suivant résume les quatre étapes qui expriment le texte d'al-Qatrawānī :

x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x	
$a_6 = 81$	$a_5 = 72$	$a_4 = 106$	$a_3 = 184$	$a_2 = 89$	$a_1 = 80$	$a_0 = 64$
$\sqrt{a_6} = b_3$ 9	$a_5 = 2b_2b_3$	${b_2}^2 + 2b_1b_3 = a_4$ 4	$a_3 = 2(b_0b_3 + b_1b_2)$	${b_1}^2 + 2b_0b_2 = a_2$	$a_1 = 2b_0b_1$	$a_0 = {b_0}^2$

$b_3 = 9$	$2b_3 = 18$	$2b_1b_3 = 90$ $b_2 = 4$	$2b_0b_3 = 144$ $2b_1b_2 = 40$	$2b_0b_2 = 64$ ${b_1}^2 = 25$	80 $2b_1 = 10$	64 b_0
			$b_3 = 9$	$b_2 = 4$	$b_1 = 5$	$b_0 = 8$

Tableau 2

Donc al-Qatrawānī a trouvé la racine carrée f_x du polynôme P_x que l'on peut exprimer par la formule suivante :

$$\sqrt{81x^6 + 72x^5 + 106x^4 + 184x^3 + 89x^2 + 80x + 64} = 9x^3 + 4x^2 + 5x + 8$$

Si on revient à ces quatre étapes qui résument l'algorithme d'al-Qatrawānī, nous pouvons dire qu'il y a beaucoup d'outils et d'intermédiaires qui montrent une richesse et une diversité algorithmique, différente dans son contenu de l'école orientale. Mais il faut bien prendre en compte qu'il y a une analogie entre les trois mathématiciens, surtout si on se base sur le procédé algorithmique d'as-Samaw'al et celui d'al-Qatrawānī, on est amené à conclure que les deux mathématiciens ont cherché les coefficients à partir des termes extrêmes d'une part, et d'autre part ils ont utilisé les mêmes techniques qui utilisent les opérations arithmétiques (soustraction, multiplication, division) pour calculer la racine carrée du polynôme. Dans ce sens on peut confirmer, suivant le procédé algorithmique des trois mathématiciens, qu'il y a une ressemblance entre eux, ce qui signifie l'impact des innovations algébriques de l'école orientale sur le travail d'al-Qatrawānī, c'est-à-dire que ce dernier s'est inspiré des travaux algébriques d'al-Karajī et de ceux d'as-Samaw'al, concernant l'extraction de la racine carrée d'un polynôme.

4 - L'extraction de la racine cubique d'un polynôme cube parfait

Après avoir étudié la racine carrée d'un polynôme, al-Qaṭrawānī s'oriente vers le procédé d'extraction de la racine cubique qui caractérise son travail et donne une originalité à son livre Rashfat ar-ruḍāb**,** puisque nous sommes devant un algorithme d'extraction de la racine cubique que l'on ne trouve, ni chez les mathématiciens de l'école orientale ni dans les écrits connus des mathématiciens Maghrébins.

Comme le procédé d'extraction de la racine carrée, al-Qaṭrawānī commence par décrire deux conditions nécessaires pour que le polynôme considéré soit un cube parfait. Il dit :

« Pour qu'un polynôme soit un cube parfait, il faut qu'il y ait deux conditions : la première est que les exposants extrêmes doivent êtres divisibles par 3. La deuxième est que les termes extrêmes soient des cubes parfaits.»[20]

Après avoir énoncé les deux conditions nécessaires pour qu'un polynôme soit cube parfait, al-Qaṭrawānī présente la règle d'extraction d'un cube qui est dans son procédé algorithmique identique à l'extraction de la racine carré, il dit:

« Pour extraire une racine cubique, tu disposes les monômes selon l'ordre ; s'il manque un monôme [une puissance de x], inscris zéro à sa place. Si les deux conditions sont remplies, marque un point sous le premier monôme, puis sous le quatrième à partir du premier et sous le quatrième à partir du quatrième ; tu ne cesses de procéder ainsi jusqu'au dernier [monôme] donné. Trace une ligne [droite] sous ces points. Ensuite, dispose sous le dernier point en haut de la ligne un nombre dont le cube épuise ce qui est au-dessus. Elève ce nombre au carré, multiplie-le par trois et dispose le résultat sous l'ordre qui suit, en bas de la ligne. Puis multiplie-le par trois et inscris le résultat sous l'ordre qui précède celui sous lequel il y a un point. Ensuite, tu disposes un nombre sous l'ordre qu'on voit sous lequel il y a une marque, nombre dont le produit par le premier mis en bas de la ligne épuise ce qui est au- dessus; s'il reste un nombre, il n'y a pas de racine cubique; sinon, multiplie ce nombre par le second mis en bas de la ligne et soustrais le résultat de ce qui est au-dessus; si ce dernier est épuisé, ce qui est en haut de la ligne est la racine cubique. Sinon procède comme dans le cas du nombre connu jusqu'à la fin.[21]"

Pour simplifier et démontrer cette règle, al-Qaṭrawānī présente l'exemple suivant qui est fondé sur des procédés algorithmiques.

Quelle est la racine cubique de 27 cubes (ك), 108 carrés-carrés (ممـ), 198 cubo-carrés (كمـ) 208 cubo-cubes (ككـ), 132 carrés-carrés-cube (كمـمـ) , 48 carrés-carrés carrés (مممـ) et 8 cubo-cubo-cubes (كككـ) ?

كككـ	ممممـ	ممكـ	ككـ	كمـ	ممـ	كـ
8	48	132	208	198	108	27

est un polynôme de degré 9, qu'on peut écrire en notation moderne par :

$8x^9 + 48x^8 + 132x^7 + 208x^6 + 198x^5 + 108x^4 + 27x^3$. Et qui exprime de façon générale un polynôme :

$$a_9x^9 + a_8x^8 + a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Pour que le polynôme $8x^9 + 48x^8 + 132x^7 + 208x^6 + 198x^5 + 108x^4 + 27x^3$ soit un cube parfait, il faut appliquer la règle précédente en commençant par inscrire 2 sous le dernier ordre. Enlève au cube ; le résultat 8 épuise le 8 du dessus. Après élevé-le au carré, multiplie le résultat par 3 et dispose le 12 sous 48 en bas de la ligne comme il a dit. Puis on multiple 2 par 3, on recherche un nombre à placer sous 208 et dont le produit par 12 épuise 48, multiplie-le par 6 et soustrais le résultat 96 de ce qui est au-dessus ; il reste 36 que tu mets à la place de 132. Elevé 4 au cube et soustrais le résultat 64 de ce qui est au-dessus ; il reste 144. Pour continuer le traitement des monômes on élevé ensuite 4 et 2 au carré, multipliant chaque carré par 3 et en disposant le premier résultat sous 198, le second sous le suivant et le troisième sous le troisième. S'il n'y a rien au-dessus du troisième et s'il ne subsiste aucun coefficient qu'on peut déplacer dessous, dont il n'y a pas de racine cubique. Ce qui nous oblige à continuer le traitement de multiplier 4 et 2 par 3, d'où l'on dispose du

[20] - Ibid., p 124.

[21] - Ibid., pp 126 – 127.

premier résultat sous 108 et le second sous le suivant, puis 3 sous l'ordre marqué suivant. Ensuite on multiplie 3 par 12, le produit 36 épuise ce qui est au-dessus ; puis par le 48 qui suit ; le résultat 144 épuise ce qui est au-dessus. Après le 48 qui suit, nous obtiendrons 144 soustrait de ce qui est au-dessus ; il reste 54; élève 3 au carré et multiplie le produit par 6; le résultat 54 épuise le 54 du dessus. Ce qui nous conduit à multiplier le 9 par 12 ; le résultat 108 épuise ce qui est au-dessus ; ensuite on élevé 3 au cube, le produit est 27 et tout ce qui est au-dessus de la ligne se trouve épuisé**.**

On note qu'al-Qaṭrawānī commence à chercher les coefficients, en partant d'un terme de plus haut degré (extrême) jusqu'au terme constant (le nombre) pour extraire la racine cubique d'un polynôme cube parfait. Il a trouvé que la racine cubique d'un polynôme de degré $9(P_x)$ est un polynôme de troisième degré (f_x) selon cette forme:

$P_x = a_6x^9 + a_5x^8 + a_4x^7 + a_3x^6 + a_2x^5 + a_1x^4 + a_0x^3$ et $f_x = b_2x^3 + b_1x^2 + b_0x$

On signale qu'il s'intéresse à la détermination des coefficients, puisque f_x est la racine cubique de P_x, il faut déterminer les coefficients (b_2, b_1, b_0) de f_x à partir du coefficients $(a_6, a_5, a_4, a_3, a_2, a_1, a_0)$ de P_x.

D'après ce procédé algorithmique, qui présente des étapes de calcul bien déterminées et appliquées, on obtient la racine cubique cherchée de l'exemple précédent, qui est : $\sqrt[3]{8x^9 + 48x^8 + 132x^7 + 208x^6 + 198x^5 + 108x^4 + 27x^3} = 2x^3 + 4x^2 + 3x$

Suivant une notation moderne, on exprime la démarche algorithmique qui a été introduite dans le texte mentionné ci-dessus, à travers lequel nous résumons, en quatre étapes, le procédé d'al-Qaṭrawānī.

Première étape : suivant les deux conditions précédentes et la règle générale des polynômes, nous avons $a_6 = (b_2)^3\ avec\ a_6 - (b_2)^3 = 0$, c'est-à-dire nous cherchons un nombre qu'on le multiplie par lui–même et qu'on le retranche du premier coefficient 8 il ne reste rien. Il trouve $\sqrt[3]{a_6} = b_2$ ou $a_6 = (b_2)^3$ donc $b_2 = 2$

Deuxième étape: On écrit le triple du carré b_2 $3\left({b_2}^2 = 3.4 = 12\right)$ sous $a_5 = 3{b_2}^2b_1 = 48$ en bas de la ligne (case des x^8) , comme il a dit, puis on dispose sous le rationnel qui suit a_5 un nombre dont le produit par $3{b_2}^2b_1 = 48$ épuise a_5; on trouve que $b_1 = 4$, ce qui conduit à $a_4 = 3\left(b_0{b_2}^2 + {b_1}^2b_2\right) = 132$; puis on recherche un nombre à placer sous l'ordre rationnel $a_4 = 208$, qui justifier l'opération suivante: $b_1 = \frac{a_5}{3{b_2}^2} = \frac{8}{12} = 4$; dont on multiple $(2b_2)^2 = 16$ par $3b_2 = 6$, le produit(96) et soustrait de $a_4 = 3\left(b_0{b_2}^2 + {b_1}^2b_2\right) = 132$, il reste 36 dans la case des x^7 : $a_4 - \left(2{b_2}^2 3b_2\right) = a_4 - 6{b_2}^3 = 3b_0{b_2}^2 = 132 - 96 = 36$

Puis on soustrait ${b_1}^3$ $\left({b_1}^3 = 64\right)$ de $a_3 = 208$ il reste 144 dans la case des x^6 . D'ailleurs, on ajoute $3\,{b_2}^2 = 12$ sous $a_2 = 198$ dans la case des x^5 et $3b_1 = 12$

Sous $a_1 = 3{b_0}^2b_1 = 108$ dans la case des x^4.

Troisième étape: On trouve après des techniques de calcul sur $a_1 = 3{b_0}^2b_1 = 108$ que $b_0 = \frac{a_1}{3{b_1}^2} = 3$ qu'on met sous $a_0 = 27$ dans la case des x^3

Quatrième étape: Enfin on cherche à partir de la combinaison des coefficients def_x $(b_0, b_1,\ b_2)$, à vider les cases qui contiennent un reste, ce qui conduit à :

$b_0\,.3\,{b_2}^2 = 3\,.12 = 36$ épuise la case des x^7.

$b_0\,.6\,b_1 b_2 = 3\,.48 = 144$ épuise la case des x^6.

$a_2 - b_0\,.6\,b_1 b_2 = 198 - 144 = 54\ et\ on\ le\ retranche\ de\ 6{b_0}^2$ Se épuise la case des x^5.

$3{b_0}^2{b_2}^2 = a_1 = 108$ épuise la case des x^4. Et enfin on épuise $a_0 = 27$ par le cube de b_0 $\left({b_0}^3 = 3^3 = 27\right)$.

D'après ce procédé on obtient la racine cubique cherchée:

$\sqrt[3]{P_x} = f_x = 2x^3 + 4x^2 + 3x$

Le tableau suivant résume les quatre étapes qui expriment le procédé algorithmique d'al-Qatrawānī pour extraire la racine cubique d'un polynôme:

$\boldsymbol{x^9}$	$\boldsymbol{x^8}$	$\boldsymbol{x^7}$	$\boldsymbol{x^6}$	$\boldsymbol{x^5}$	$\boldsymbol{x^4}$	$\boldsymbol{x^3}$
$\boldsymbol{a_6 = 8}$	$\boldsymbol{a_5 = 48}$	$\boldsymbol{a_4 = 132}$	$\boldsymbol{a_3 = 208}$	$\boldsymbol{a_2 = 198}$	$\boldsymbol{a_1 = 108}$	$\boldsymbol{a_0 = 27}$
$\boldsymbol{\sqrt[3]{a_6} = b_2}$ $\boldsymbol{b_2 = 2}$	$\boldsymbol{a_5 = 3b_2^2 b_1}$ $\boldsymbol{b_1 = \frac{a_5}{3b_2^2}}$ $\boldsymbol{b_1 = 4}$	$\boldsymbol{3\left(b_0{b_2}^2 + b_1^2 b_2\right) = a_4}$ $\boldsymbol{a_4 - \left(2{b_2}^2 3b_1 = 3b_0{b_2}^2 = 36\right.}$	$\boldsymbol{a_3 = b_1^3 + 6b_0 b_1 b_2}$ $\boldsymbol{a_3 - b_1^3 = 144}$	$\boldsymbol{6{b_0}^2 + 6b_0 b_1 b_2 = a_2}$ $\boldsymbol{3\,{b_2}^2 = 12}$	$\boldsymbol{a_1 = 3{b_0}^2 b_1}$ $\boldsymbol{3b_1 = 12}$	$\boldsymbol{a_0 = {b_0}^3}$ $\boldsymbol{b_0^2 = \frac{a_1}{3{b_2}^2}}$
$\boldsymbol{b_2 = 2}$	$\boldsymbol{b_1 = 4}$	$\boldsymbol{b_0\,.3\,{b_2}^2 = 36}$	$\boldsymbol{b_0\,.6\,b_1 b_2 = 144}$	$\boldsymbol{(a_2 - b_0\,.6\,b_1 b_2) - 6b_0^2 = 0}$	$\boldsymbol{\left(3b_0^2{b_2}^2\right) - a_2 = 0}$	$\boldsymbol{{b_0}^3 = 27}$ $\boldsymbol{a_0 - {b_0}^3 = 0}$
						$\boldsymbol{b_0 = 3}$

Tableau 3

Il faut indiquer, à propos de ces quatre étapes qui résument le procédé algorithmique d'al-Qatrawānī, que le traitement spécifique de la racine cubique d'un polynôme donne toute sa singularité et son originalité au travail de notre mathématicien d'al-Qatrawānī, et enrichie les procédés algorithmiques qui

Conclusion :

L'étude analytique que nous avons présentée ci-dessus, inclut quelques signes relatifs à la méthode d'extraction de la racine carré et de la racine cubique d'un polynôme, chose qui nous a permis de déduire qu'al- Qatrawānī a connu, directement ou par des intermédiaires, le travail de l'école orientale et qu'il en a était influencé, nous pouvons aussi préciser que son travail algébrique s'est inspiré des travaux de l'école orientale(al-Karajī, as-Samaw'al), puisque nous trouvons une analogie de procédé algorithmique et une démarche algébrique similaire adopté par les trois mathématiciens, et ce, malgré quelques différences, ceci indique qu'il y a une certaine influence de l'école orientale sur le traitement des polynômes chez al- Qatrawānī. Pourtant, ce jugement n'est pas suffisant pour exprimer l'existence de l'influence, puisque nous manquons de sources bibliographiques et mathématiques pour le confirmer.

Au terme de ce parcours des polynômes, nous signalons que l'originalité et la richesse que nous avons attribuées au livre d'al- Qatrawānī Rashfat ar-ruḍāb s'appuie sur l'absence des idées mathématiques (polynômes) chez les mathématiciens maghrébins, et aussi ce travail d'al-Qatrawānī paraît très développé par rapport aux innovations d'école d'orient, surtout quand on parle de l'extraction de la racine cubique d'un polynôme cube parfait, ceci n'existe pas dans les travaux connus d'al-Karajī et de celui d'as-Samaw'al al-Maghribī. Ce qui signifie une importance dans l'histoire des mathématiques arabes qui révèle la nature de la matière mathématique, surtout les outils algébriques qui ont été utilisés dans les procédés algorithmiques.

L'importance du livre d'al- Qatrawānī ne se trouve pas dans le résultat du calcul, ni dans le fait de proposer une nouvelle règle ou méthode mathématique, mais de traiter les signes qui signifient la circulation des idées mathématiques dans l'empire musulman[22] ; par exemple le traitement des polynômes pose des questions qui ont tourmenté les historiens à propos de la transmission des idées et des techniques du calcul entre l'orient et l'occident musulmans et plutôt attiré l'attention sur l'évolution des problèmes mathématiques, qui paraît chez al-Qatrawānī, pour la première fois dans l'histoire des mathématiques arabes, pour l'extraire de la racine cube d'un polynôme cube parfait.

Bibliographie :

al–Qatrawānī. *Rashfat ar-ruḍāb min thughūr aᶜmāl al-ḥisāb* [La succion du nectar des bouches des opérations du calcul]. Manuscrit de la bibliothèque nationale(BN), Rabat, Q416.

al-Qatrawānī. *Rashfat ar-ruḍāb min thughūr aᶜmāl al-ḥisāb*. Manuscrit de la bibliothèque nationale, Tunis, 7803 et 19620/2.

[22] - Djebbar, A. (2005*). L'algèbre Arabe genèse d'un art*, op.Cit., p 100.

Anbouba Adel. (1964). *L'algèbre Al-Badī^c d'al-Karajī.* Publication de l'université libanaise, Beyrouth.

Djebbar Ahmed. (1988) : *Quelques aspects de l'algèbre dans la tradition mathématique arabe de l'Occident musulman*. Premier Colloque maghrébin d'Alger sur l'Histoire des Mathématiques Arabes, 1-3 décembre 1986, dans les Actes du Colloque, Alger, Maison du Livre.

Djebbar Ahmed. (2001). *Une histoire de la science Arabe* : Entretien avec Jean Rosmorduc. Édition du Seuil.

Djebbar Ahmed. (2005). *L'algèbre Arabe genèse d'un art*, Vuibert, édit Adapt, paris.

Djebbar Ahmed. (2013). *Al- Khwārizmī l'algèbre et le calcul indien*. Les éditions du Kangourou.

Lamrabet Driss. (2014). *Introduction à l'histoire des mathématiques Maghrébine*. Édition print book , France, 2éme Edition revue et augmentée.

Mahdi Abdeljouad et Hamida Hedfi. (2018). *Manuscrits scientifiques du fonds Ahmadi (Mathématiques-Astronomie – Astrologie)*. Bibliothèque Nationale de Tunis.

Moslih Ahmed. (2018). *Algorithme et Optimisation chez al-Qatrawānī*. In Actes du XIIè Colloque maghrébin sur l'Histoire des Mathématiques Arabes, 26-28 mai 2016, Editeur école Normale Supérieure, Marrakech, Maroc, pp. 186 - 207.

Roshdi Rashed. (1984). *Entre arithmétique et algèbre : recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*. Édition Les Belles Lettres, Paris.

Rashed, R.(2007). *AL-khawārizmī le commencement de l'algèbre*. Paris, Éditions Albert Blanchard.

Salah Ahmad et Roshdi Rashed. (1972). *Al-Bāhir en algèbre d'as-samaw'al*. Université de Damas.

Thomas L. Heath. (1956). *The thirteen Books of Euclid's Elements*. Traduction et Édition. Second édition, dover, New-York.

Woepcke, F. (1853). *Extrait du Fakhrī : traité d'algèbre*. Imprimerie Impériale, Pais [S.pb].